一元二次方程的整数根

一元二次方程的整数根问题难度较大，是中考特别是竞赛中的爬坡题型。本文举例说明与一元二次方程整数根有关问题的解法。

例1. 已知方程$x^2+(a-6)x+a=0(a\neq 0)$的两根都是整数，试求整数a的值。

思路分析：当a取值不同时，方程的系数就随之不同，方程的根的情况也就发生变化。究意什么情况下，方程的两根都是整数呢？还是从根与系数的关系入手比较好。

解：设方程的两整数根为x_1、x_2，根据根与系数关系得：

$$\begin{cases} x_1+x_2=6-a & (1) \\ x_1\cdot x_2=a & (2) \end{cases}$$

（1）＋（2）得：$x_1x_2+x_1+x_2=6$

所以$(x_1+1)(x_2+1)=7$

$\begin{cases} x_1+1=1 \\ x_2+1=7 \end{cases}$或$\begin{cases} x_1+1=-1 \\ x_2+1=-7 \end{cases}$

或$\begin{cases} x_1+1=7 \\ x_2+1=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x_1+1=-7 \\ x_2+1=-1 \end{cases}$

所以$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=6 \end{cases}$或$\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-8 \end{cases}$或$\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=-2 \end{cases}$

因为$a\neq 0$，所以$x_1x_2\neq 0$

只有$\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-8 \end{cases}$或$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=-2 \end{cases}$符合题意，代入（2）得：

$a=x_1x_2=(-2)\times(-8)=16$

例2. 已知方程$(a^2-1)x^2-2(5a+1)x+24=0$有两个不等的负整数根，

则a的值是______。

思路分析：本题的条件在“整数根”的基础上更进一步，变为“负整数根”，这对系数a有了更多的限制。另外，本题的a没有说它是整数，难度更大了。应当抓住“负整数根”做文章。

解：$\Delta = 4(5a+1)^2 - 4\times 24(a^2-1) = 4(a+5)^2$

所以$x_1 = \dfrac{2(5a+1)+2(a+5)}{2(a^2-1)} = \dfrac{6}{a-1}$

$x_2 = \dfrac{2(5a+1)-2(a+5)}{2(a^2-1)} = \dfrac{4a-4}{a^2-1} = \dfrac{4}{a+1}$

依题意有：$\dfrac{6}{a-1}$、$\dfrac{4}{a+1}$均为负整数，符合此条件的仅有$a=-2$。

例 3. 设m为自然数，且$4<m<40$，若方程$x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$的两根均为整数，则m＝______。

思路分析：题目已给出m的范围，再加上判别式应满足的条件，可进一步对m加以限制，就不难求出符合条件的m值了。

解：$\Delta = 4(2m-3)^2 - 4(4m^2-14m+8) = 4(2m+1)$

因为原方程的两根均为整数，所以$2m+1$必为完全平方数，且必为奇数的平方。于是由$4<m<40$得$9<2m+1<81$，在此范围内的奇完全平方数只有25和49。

所以$2m+1=25$或$2m+1=49$

所以$m=12$或$m=24$

经检验，$m=12$、24均符合题意。

误区点拨：本题解法的最后一步检验虽一语带过，但却是一个必

不可少的步骤。因为整系数一元二次方程的判别式是完全平方数只是该方程有整数根的必要条件，但不是充分条件。也就是说，Δ为完全平方数，并不能保证方程一定有整数根，所以说，必须进行检验。