

湖南省娄底市 2013 年中考数学试卷

一、精心选一选，旗开得胜（本大题共 10 道小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) (2013•娄底) $|-2013|$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2013}$ B. $-\frac{1}{2013}$ C. 2013 D. -2013

考 绝对值 . .

点 :

分 计算绝对值要根据绝对值定义去掉这个绝对值的符号 .

析 :

解 解: $|-2013|=2013$.

答 : 故选 C .

点 此题考查了绝对值的性质, 要求掌握绝对值的性质及其定义, 并能熟练运用到实际

评 : 运算当中 .

绝对值规律总结: 一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0 .

2. (3 分) (2013•娄底) 下列运算正确的是 ()

- A. $(a^4)^3=a^7$ B. $a^6 \div a^3=a^2$ C. $(2ab)^3=6a^3b^3$ D. $-a^5 \cdot a^5=-a^{10}$

考 同底数幂的除法; 同底数幂的乘法; 幂的乘方与积的乘方 .

点 :

分 分别利用同底数幂的除法、同底数幂的乘法、积的乘方法则判断得出即可 .

析 :

解 解: A、 $(a^4)^3=a^{12}$, 故此选项错误;

答 : B、 $a^6 \div a^3=a^3$, 故此选项错误;

C、 $(2ab)^3=8a^3b^3$, 故此选项错误;

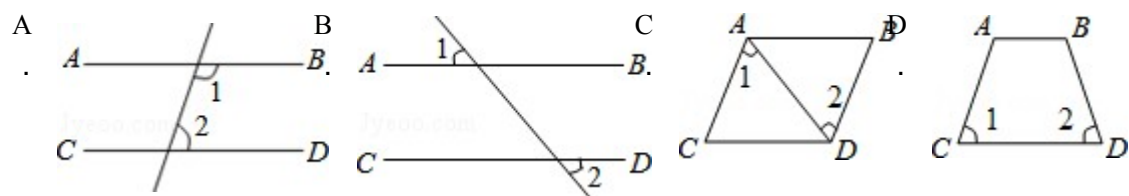
D、 $-a^5 \cdot a^5=-a^{10}$, 故此选项正确 .

故选: D .

点 本题考查了同底数幂的除法、同底数幂的乘法、积的乘方, 解题的关键是掌握相关

评 : 运算的法则 .

3. (3 分) (2013•娄底) 下列图形中, 由 $AB \parallel CD$, 能使 $\angle 1 = \angle 2$ 成立的是 ()



考 平行线的性质 .

点 :

分 根据平行线的性质对各选项分析判断后利用排除法求解 .

析：

解：A、由 $AB \parallel CD$ 可得 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，故本选项错误；

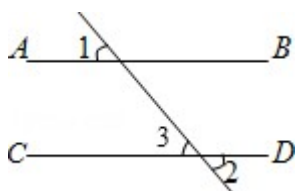
答：B、 $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 3，$$

又 $\because \angle 2 = \angle 3$ （对顶角相等），

$$\therefore \angle 1 = \angle 2，$$

故本选项正确；



C、由 $AC \parallel BD$ 得到 $\angle 1 = \angle 2$ ，由 $AB \parallel CD$ 不能得到，故本选项错误；

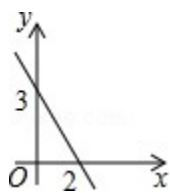
D、梯形 ABCD 是等腰梯形才可以有 $\angle 1 = \angle 2$ ，故本选项错误．

故选 B．

点 本题考查了平行线的性质，等腰梯形的性质，熟记性质并准确识图是解题的关键．

评：

4．（3分）（2013•娄底）一次函数 $y=kx+b$ （ $k \neq 0$ ）的图象如图所示，当 $y > 0$ 时， x 的取值范围是（ ）



A． $x < 0$

B． $x > 0$

C． $x < 2$

D． $x > 2$

考 一次函数的图象．

点：

分 根据函数图象与 x 轴的交点坐标可直接解答．从函数图象的角度看，就是确定直线

析： $y=kx+b < 0$ 的解集，就是图象在 x 轴下方部分所有的点的横坐标所构成的集合．

解 解：因为直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标为 $(2, 0)$ ，

答：由函数的图象可知当 $y > 0$ 时， x 的取值范围是 $x < 2$ ．

故选 C．

点 此题考查一次函数的图象，运用观察法解一元一次不等式通常是从交点观察两边得

评： 解．

5．（3分）（2013•娄底）有一组数据：2，5，7，2，3，3，6，下列结论错误的是（ ）

A．平均数为 4

B．中位数为 3

C．众数为 2

D．极差是 5

考 极差；算术平均数；中位数；众数．

点：

分析：根据极差、众数及中位数的定义，结合选项进行判断即可。

解：

解：将数据从小到大排列为：2，2，3，3，5，6，7，

答：A、平均数= $(2+2+3+3+5+6+7) \div 7 = 4$ ，结论正确，故本选项错误；

B、中位数为3，结论正确，故本选项错误；

C、众数为2和3，结论错误，故本选项正确；

D、极差为 $7 - 2 = 5$ ，结论正确，故本选项错误；

故选C。

点评：本题考查了中位数、众数、平均数及极差的知识，掌握各部分的定义是关键，在判

断中位数的时候一样要将数据重新排列。

6. (3分) (2013•娄底) 下列命题中，正确的是 ()

A. 平行四边形的对角线相等

B. 矩形的对角线互相垂直

C. 菱形的对角线互相垂直且平分

D. 梯形的对角线相等

考点：命题与定理。

分析：

根据菱形、平行四边形、矩形、等腰梯形的性质分别判断得出即可。

解：

解：A、根据平行四边形的对角线互相平分但不相等，故此选项错误；

B、矩形的对角线相等，但不互相垂直，故此选项错误；

C、根据菱形的性质，菱形的对角线互相垂直且平分，故此选项正确；

D、根据等腰梯形的对角线相等，故此选项错误；

故选：C。

点评：此题主要考查了菱形、平行四边形、矩形、等腰梯形的性质，熟练掌握相关定理是

解题关键。

7. (3分) (2013•娄底) 式子 $\frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 有意义的x的取值范围是 ()

A. $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$

B. $x \neq 1$

C. $x \geq -\frac{1}{2}$

D. $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$

考点：二次根式有意义的条件；分式有意义的条件。

分析：

根据被开方数大于等于0，分母不等于0列式进行计算即可得解。

解：

解：根据题意得， $2x+1 \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$ ，

解得 $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ 。

故选A。

点评：本题考查的知识点为：分式有意义，分母不为0；二次根式的被开方数是非负数。

解：

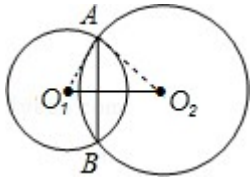
点：

分析：根据相交两圆的性质得出 $AC=AB$ ，进而利用勾股定理得出 AC 的长。

析：

解：连接 AO_1, AO_2 ，

答：



$\because \odot O_1, \odot O_2$ 相交于 $A、B$ 两点，两圆半径分别为 6cm 和 8cm ，两圆的连心线 O_1O_2 的长为 10cm ，

$\therefore O_1O_2 \perp AB$ ，

$\therefore AC=AB$ ，

设 $O_1C=x$ ，则 $O_2C=10-x$ ，

$\therefore 6^2 - x^2 = 8^2 - (10-x)^2$ ，

解得： $x=3.6$ ，

$\therefore AC^2 = 6^2 - x^2 = 36 - 3.6^2 = 23.04$ ，

$\therefore AC=4.8\text{cm}$ ，

\therefore 弦 AB 的长为： 9.6cm 。

故选： B 。

点 此题考查了相交圆的性质与勾股定理。此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注
评：意数形结合思想与方程思想的应用。

二、细心填一填，一锤定音（本大题共 8 道小题，每小题 4 分，满分 32 分）

11. (4分) (2013·娄底) 计算： $(\frac{1}{3})^{-1} - (2 - \sqrt{3})^0 - 4\sin 60^\circ + \sqrt{12} = \underline{2}$ 。

考 实数的运算；零指数幂；负整数指数幂；特殊角的三角函数值。

点：

分 分别进行负整数指数幂、零指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式的化简等运
析：算，然后按照实数的运算法则计算即可。

解：

原式 $= 3 - 1 - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}$

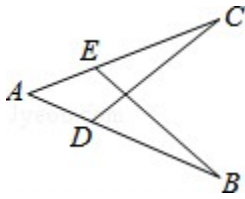
答：

$= 2$ 。

故答案为： 2 。

点 本题考查了实数的运算，涉及了负整数指数幂、零指数幂、特殊角的三角函数值、
评：二次根式的化简等知识点，属于基础题。

12. (4分) (2013·娄底) 如图， $AB=AC$ ，要使 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，应添加的条件是 $\angle B = \angle C$ 或 $AE=AD$ （添加一个条件即可）。



考点：全等三角形的判定．

点：

专题：开放型．

题：

分析：要使 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，已知 $AB=AC$ ， $\angle A=\angle A$ ，则可以添加一个边从而利用 SAS 来判定其全等或添加一个角从而利用 AAS 来判定其全等．

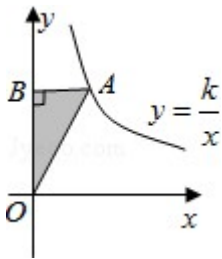
解：添加 $\angle B=\angle C$ 或 $AE=AD$ 后可分别根据 ASA、SAS 判定 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ．

答：故填 $\angle B=\angle C$ 或 $AE=AD$ ．

点评：本题考查三角形全等的判定方法；判定两个三角形全等的一般方法有：

SSS、SAS、ASA、AAS、HL．添加时注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，不能添加，根据已知结合图形及判定方法选择条件是正确解答本题的关键．

13．（4分）（2013•娄底）如图，已知 A 点是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ （ $k \neq 0$ ）的图象上一点， $AB \perp y$ 轴于 B，且 $\triangle ABO$ 的面积为 3，则 k 的值为 6．



考点：反比例函数系数 k 的几何意义．

点：

分析：过双曲线上任意一点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的直角三角形面积 S 是个定值，即 $S=|k|$ ．

解：根据题意可知： $S_{\triangle ABO}=|k|=3$ ，

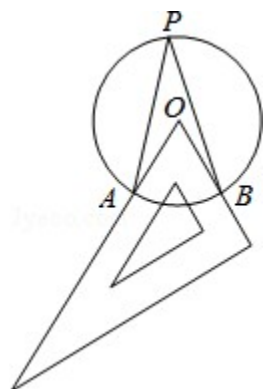
答：由于反比例函数的图象位于第一象限， $k > 0$ ，
则 $k=6$ ．

故答案为：6．

点评：

本题主要考查了反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ （ $k \neq 0$ ）中 k 的几何意义，即过双曲线上任意一点引 x 轴、y 轴垂线，所得三角形面积为 $|k|$ ，是经常考查的一个知识点；这里体现了数形结合的思想，做此类题一定要正确理解 k 的几何意义．

14. (4分) (2013•娄底) 如图, 将直角三角板 60° 角的顶点放在圆心 O 上, 斜边和一直角边分别与 $\odot O$ 相交于 A 、 B 两点, P 是优弧 AB 上任意一点 (与 A 、 B 不重合), 则 $\angle APB = \underline{30^\circ}$.



考 圆周角定理 .

点 :

分 根据在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角
析 : 的一半, 即可得出答案 .

解 解: 由题意得, $\angle AOB = 60^\circ$,

答 : 则 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$.

故答案为: 30° .

点 本题考查了圆周角定理的知识, 解答本题的关键是熟练掌握圆周角定理的内容 .

评 :

15. (4分) (2013•娄底) 娄底市商务局对外贸易部 2012 年进出口总额达 12.8 亿元, 则 12.8 亿用科学记数法表示为 $\underline{1.28 \times 10^9}$.

考 科学记数法—表示较大的数 .

点 :

分 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值是易
析 : 错点, 由于 12.8 亿有 10 位, 所以可以确定 $n = 10 - 1 = 9$.

解 解: 12.8 亿 $= 1\ 280\ 000\ 000 = 1.28 \times 10^9$.

答 : 故答案为: 1.28×10^9 .

点 此题考查科学记数法表示较大的数的方法, 准确确定 a 与 n 值是关键 .

评 :

16. (4分) (2013•娄底) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍, 则这个多边形的边数为 $\underline{6}$.

考 多边形内角与外角 .

点 :

分 利用多边形的外角和以及多边形的内角和定理即可解决问题 .

析 :

解 解： \because 多边形的外角和是 360 度，多边形的内角和是外角和的 2 倍，

答：则内角和是 720 度，

$$720 \div 180 + 2 = 6,$$

\therefore 这个多边形是六边形．

故答案为：6．

点 本题主要考查了多边形的内角和定理与外角和定理，熟练掌握定理是解题的关键．

评：

17．（4分）（2013•娄底）一圆锥的底面半径为 1cm，母线长 2cm，则该圆锥的侧面积为 2π cm^2 ．

考 圆锥的计算．

点：

分 圆锥的侧面积=底面周长 \times 母线长 $\div 2$ ，把相应数值代入即可求解．

析：

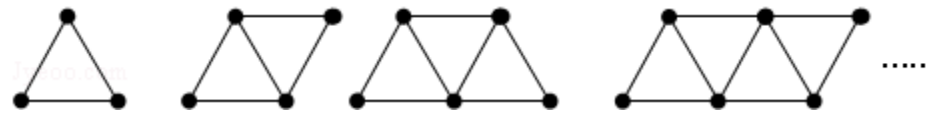
解 解：圆锥的侧面积= $2\pi \times 1 \times 2 \div 2 = 2\pi$ ．

答：故答案为： 2π ．

点 本题考查了圆锥的计算，解题的关键是弄清圆锥的侧面积的计算方法，特别是圆锥

评：的底面周长等于圆锥的侧面扇形的弧长．

18．（4分）（2013•娄底）如图，是用火柴棒拼成的图形，则第 n 个图形需 $2n+1$ 根火柴棒．



考 规律型：图形的变化类．

点：

分 按照图中火柴的个数填表即可当三角形的个数为：1、2、3、4 时，火柴棒的个数分

析 别为：3、5、7、9，由此可以看出当三角形的个数为 n 时，三角形个数增加 $n-1$

个，那么此时火柴棒的个数应该为： $3+2(n-1)$ 进而得出答案．

解 解：根据图形可得出：

答：当三角形的个数为 1 时，火柴棒的根数为 3；

当三角形的个数为 2 时，火柴棒的根数为 5；

当三角形的个数为 3 时，火柴棒的根数为 7；

当三角形的个数为 4 时，火柴棒的根数为 9；

...

由此可以看出：当三角形的个数为 n 时，火柴棒的根数为 $3+2(n-1) = 2n+1$ ．

故答案为： $2n+1$ ．

点 此题主要考查了图形变化类，本题解题关键根据第一问的结果总结规律是得到规

评：律：三角形的个数每增加一个，火柴棒的个数增加 2 根，然后由此规律解答．

三、用心做一做，慧眼识金（本大题共 3 道小题，每小题 7 分，满分 21 分）

19. (7分) (2013·娄底) 先化简, 再求值: $(x+y)(x-y) - (4x^3y - 8xy^3) \div 2xy$,
其中 $x = -1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

考 整式的混合运算—化简求值.

点:

专 计算题.

题:

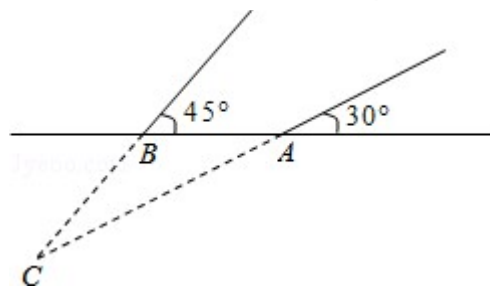
分 原式第一项利用平方差公式化简, 第二项利用多项式除单项式法则计算, 去括号合并得到最简结果, 将 x 与 y 的值代入计算即可求出值.

解 解: 原式 $= x^2 - y^2 - 2x^2 + 4y^2 = -x^2 + 3y^2$,

答: 当 $x = -1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 原式 $= -1 + 1 = 0$.

点 此题考查了整式的混合运算—化简求值, 涉及的知识有: 平方差公式, 多项式除单项式, 去括号法则, 以及合并同类项法则, 熟练掌握公式及法则是解本题的关键.

20. (7分) (2013·娄底) 2013年3月, 某煤矿发生瓦斯爆炸, 该地救援队立即赶赴现场进行救援, 救援队利用生命探测仪在地面 A、B 两个探测点探测到 C 处有生命迹象. 已知 A、B 两点相距 4 米, 探测线与地面的夹角分别是 30° 和 45° , 试确定生命所在点 C 的深度. (精确到 0.1 米, 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



考 解直角三角形的应用.

点:

分 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D, 设 $CD = x$, 在 $Rt\triangle ACD$ 中表示出 AD, 在 $Rt\triangle BCD$ 中表示出 BD, 再由 $AB = 4$ 米, 即可得出关于 x 的方程, 解出即可.

解 解: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D,

答: 设 $CD = x$,

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\angle CAD = 30^\circ$,

则 $AD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x$,

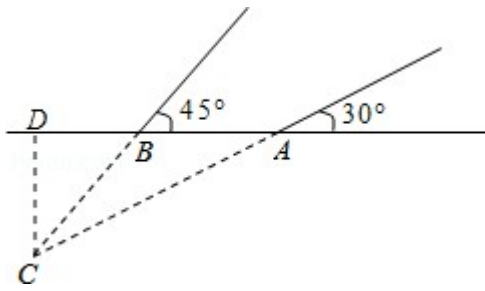
在 $Rt\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 45^\circ$,

则 $BD = CD = x$,

由题意得, $\sqrt{3}x - x = 4$,

解得: $x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} = 2(\sqrt{3} + 1) \approx 5.5$.

答: 生命所在点 C 的深度为 5.5 米.



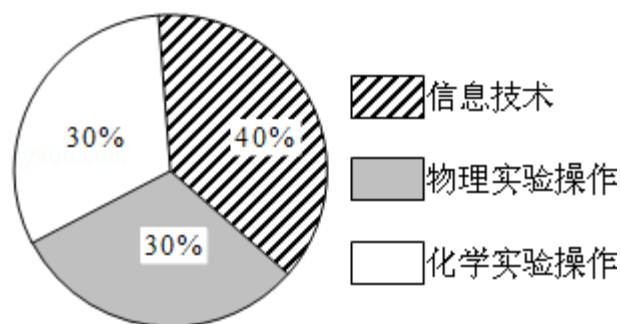
点 本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是构造直角三角形，利用三角函数知识表示出相关线段的长度，注意方程思想的运用。

21. (7分) (2013·娄底) 2013年娄底市教育局对九年级学生的信息技术、物理实验操作、化学实验操作成绩进行抽样调查，成绩评定A、B、C、D四个等级。现抽取1000名学生成绩进行统计分析(其中A、B、C、D分别表示优秀、良好、合格、不合格四个等级)，其相在数据统计如下：

人数 科目 \ 等级	A	B	C	D
信息技术		120	120	40
物理实验操作	100		80	30
化学实验操作	120	90		20

- 请将上表空缺补充完整；
- 全市共有40000名学生参加测试，试估计该市九年级学生信息技术成绩合格以上(含合格)的人数；
- 在这40000名学生中，化学实验操作达到优秀的大约有多少人？

各学科学生人数扇形统计图



考 扇形统计图；用样本估计总体；统计表。

点：

- 分** (1) 根据抽取1000名学生成绩进行统计分析得出表格中数据即可；
- 析** (2) 首先求出样本中信息技术成绩合格以上的比例，进而求出该市九年级学生信息技术成绩合格以上(含合格)的人数；
- (3) 首先求出样本中化学实验操作达到优秀的比例，进而求出该市九年级化学实验操作达到优秀的人数。

解 解：(1) ∵现抽取1000名学生成绩进行统计分析，

答：∴信息技术总人数为： $1000 \times 40\% = 400$ （人），物理实验操作总人数为： $1000 \times 30\% = 300$ （人），
 化学实验操作总人数为： $1000 \times 30\% = 300$ （人），
 ∴信息技术 A 级的人数为： $400 - 120 - 120 - 40 = 120$ （人），
 物理实验操作 B 级的人数为： $300 - 100 - 80 - 30 = 90$ （人），
 化学实验操作 C 级的人数为： $300 - 120 - 90 - 20 = 70$ （人）；

(2) ∴样本中信息技术成绩合格以上的比例为： $\frac{400 - 40}{400} \times 100\% = 90\%$ ，

∴该市九年级学生信息技术成绩合格以上（含合格）的人数为： $40000 \times 90\% = 36000$ （人）；

(3) ∴化学实验操作达到优秀的比例为： $\frac{120}{300} \times 100\% = 40\%$ ，

∴该市九年级学生化学实验操作达到优秀的大约有： $40000 \times 40\% = 16000$ （人）。

点 此题主要考查了扇形统计图以及利用样本估计总体等知识，利用扇形图求出每个项
 评：目的人数是解题关键。

四、综合用一用，马到成功（本大题共 1 道小题，满分 8 分）

22.（8 分）（2013·娄底）为了创建全国卫生城市，某社区要清理一个卫生死角内的垃圾，租用甲、乙两车运送，两车各运 12 趟可完成，需支付运费 4800 元。已知甲、乙两车单独运完此堆垃圾，乙车所运趟数是甲车的 2 倍，且乙车每趟运费比甲车少 200 元。

- (1) 求甲、乙两车单独运完此堆垃圾各需运多少趟？
- (2) 若单独租用一台车，租用哪台车合算？

考 分式方程的应用；一元一次方程的应用。

点：

分 (1) 假设甲车单独运完此堆垃圾需运 x 趟，则乙车单独运完此堆垃圾需运 $2x$ 趟，

析：根据总工作效率 $\frac{1}{12}$ 得出等式方程求出即可；

(2) 分别表示出甲、乙两车单独运每一趟所需费用，再根据关键语句“两车各运 12 趟可完成，需支付运费 4800 元”可得方程，再解出方程，再分别计算出利用甲或乙所需费用进行比较即可。

解 解：(1) 设甲车单独运完此堆垃圾需运 x 趟，则乙车单独运完此堆垃圾需运 $2x$
 答：趟，根据题意得出：

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

解得： $x = 18$ ，

则 $2x = 36$ ，

经检验得出： $x = 18$ 是原方程的解，

答：甲车单独运完需 18 趟，乙车单独运完需 36 趟；

(2) 设甲车每一趟的运费是 a 元，由题意得：

$$12a+12(a-200)=4800,$$

解得： $a=300$ ，

则乙车每一趟的费用是： $300-200=100$ （元），

单独租用甲车总费用是： $18\times 300=5400$ （元），

单独租用乙车总费用是： $36\times 100=3600$ （元），

$$3600 < 5400,$$

故单独租用一台车，租用乙车合算．

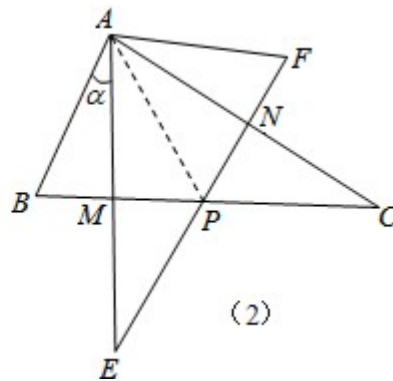
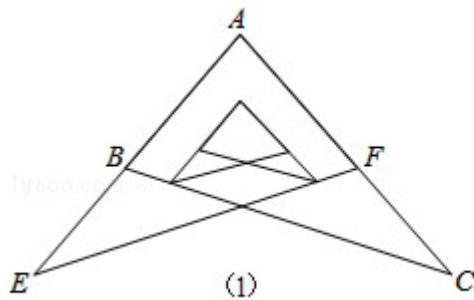
点 此题主要考查了分式方程的应用以及一元一次方程的应用，关键是正确理解题意，
评：找出题目中的等量关系，列出方程．

五、耐心想一想，再接再厉（本大题共1道小题，满分9分）

23．（9分）（2013•娄底）某校九年级学习小组在探究学习过程中，用两块完全相同的且含 60° 角的直角三角板ABC与AFE按如图（1）所示位置放置，现将 $Rt\triangle AEF$ 绕A点按逆时针方向旋转角 α （ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ），如图（2），AE与BC交于点M，AC与EF交于点N，BC与EF交于点P．

（1）求证： $AM=AN$ ；

（2）当旋转角 $\alpha=30^\circ$ 时，四边形ABPF是什么样的特殊四边形？并说明理由．



考 旋转的性质；全等三角形的判定与性质；菱形的判定．

点：

分 （1）根据旋转的性质得出 $AB=AF$ ， $\angle BAM=\angle FAN$ ，进而得出 $\triangle ABM\cong\triangle AFN$ 得
析：出答案即可；

（2）利用旋转的性质得出 $\angle FAB=120^\circ$ ， $\angle FPC=\angle B=60^\circ$ ，即可得出四边形ABPF是平行四边形，再利用菱形的判定得出答案．

解 （1）证明： \because 用两块完全相同的且含 60° 角的直角三角板ABC与AFE按如图（1）

答：所示位置放置，现将 $Rt\triangle AEF$ 绕A点按逆时针方向旋转角 α （ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ），

$$\therefore AB=AF, \angle BAM=\angle FAN,$$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AFN$ 中，

$$\begin{cases} \angle FAN=\angle BAM \\ AB=AF \\ \angle B=\angle F \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABM\cong\triangle AFN \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AM=AN;$$

(2) 解：当旋转角 $\alpha=30^\circ$ 时，四边形 ABPF 是菱形。

理由：连接 AP，

$$\because \angle \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FAN = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FAB = 120^\circ,$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore AF \parallel BP,$$

$$\therefore \angle F = \angle FPC = 60^\circ,$$

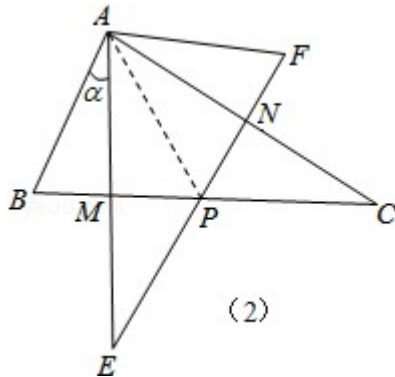
$$\therefore \angle FPC = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel FP,$$

\therefore 四边形 ABPF 是平行四边形，

$$\because AB = AF,$$

\therefore 平行四边形 ABPF 是菱形。



点 此题主要考查了平行四边形的判定以及菱形的判定和全等三角形的判定等知识，
评 据旋转前后图形大小不发生变化得出是解题关键。

六、探究试一试，超越自我（本大题共 2 道小题，每小题 10 分，满分 20 分）

24. (10 分) (2013·娄底) 已知：一元二次方程 $x^2+kx+k-1=0$ 。

(1) 求证：不论 k 为何实数时，此方程总有两个实数根；

(2) 设 $k < 0$ ，当二次函数 $y=x^2+kx+k-1$ 的图象与 x 轴的两个交点 A、B 间的距离为 4 时，求此二次函数的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，若抛物线的顶点为 C，过 y 轴上一点 $M(0, m)$ 作 y 轴的垂线 l ，当 m 为何值时，直线 l 与 $\triangle ABC$ 的外接圆有公共点？

考 二次函数综合题。

点：

分 (1) 根据一元二次方程的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的符号来判定已知方程的根的情
析 况；

(2) 利用根与系数的关系 ($|x_A - x_B| = \sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} = 4$) 列出关于 k 的方程，通过解方程来求 k 的值；

(3) 根据直线与圆的位置关系确定 m 的取值范围。

解 (1) 证明： $\because \Delta = k^2 - 4 \times (k-1) = k^2 - 2k + 4 = (k-1)^2 + 3 \geq 0$ ，

答： \therefore 关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx+k-1=0$ ，不论 k 为何实数时，此方程总有两个实数

根；

(2) 令 $y=0$ ，则 $x^2+kx+k-1=0$ 。

$\therefore x_A+x_B=-2k$ ， $x_A \cdot x_B=2k-1$ ，

$\therefore |x_A-x_B|=\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}=\sqrt{4k^2-8k+4}=2|k-1|=4$ ，即 $|k-1|=2$ ，

解得 $k=3$ （不合题意，舍去），或 $k=-1$ 。

\therefore 此二次函数的解析式是 $y=x^2-x-2$ ；

(3) 由 (2) 知，抛物线的解析式是 $y=x^2-x-2$ 。

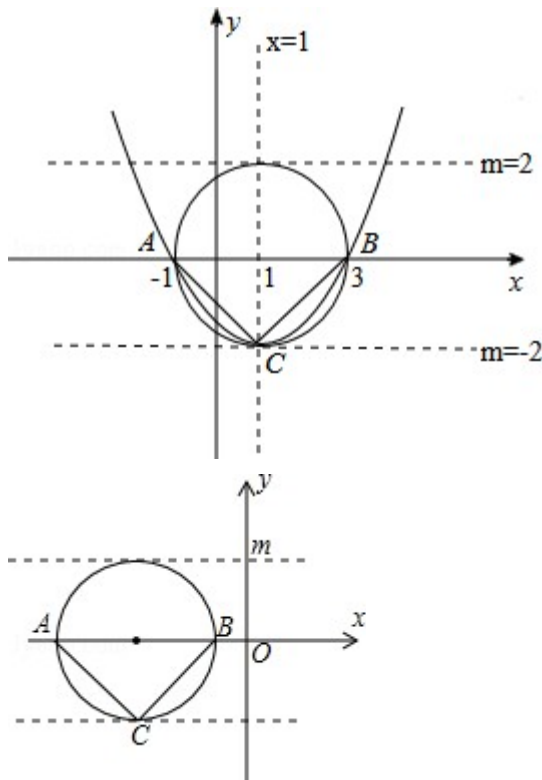
易求 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(1, -2)$ ，

$\therefore AB=4$ ， $AC=2\sqrt{2}$ ， $BC=2\sqrt{2}$ 。

显然 $AC^2+BC^2=AB^2$ ，得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。AB 为斜边，

\therefore 外接圆的直径为 $AB=4$ ，

$\therefore -2 \leq m \leq 2$ 。



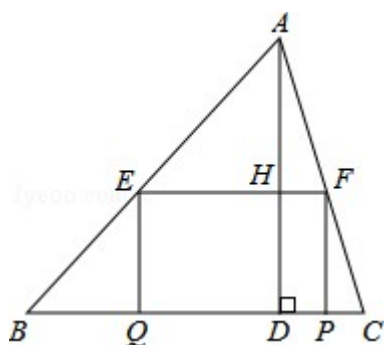
点 本题综合考查了二次函数综合题，其中涉及到的知识点有：抛物线与 x 轴的交点，
评：待定系数法求二次函数的解析式以及直线与圆的关系，范围较广，难度较大。

25. (10分) (2013·娄底) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=45^\circ$ ， $BC=5$ ，高 $AD=4$ ，矩形 $EFPQ$ 的一边 QP 在 BC 边上， E 、 F 分别在 AB 、 AC 上， AD 交 EF 于点 H 。

(1) 求证： $\frac{AH}{AD} = \frac{EF}{BC}$ ；

(2) 设 $EF=x$ ，当 x 为何值时，矩形 $EFPQ$ 的面积最大？并求出最大面积；

(3) 当矩形 EFPQ 的面积最大时, 该矩形 EFPQ 以每秒 1 个单位的速度沿射线 DA 匀速向上运动 (当矩形的边 PQ 到达 A 点时停止运动), 设运动时间为 t 秒, 矩形 EFPQ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系式, 并写出 t 的取值范围.



考点：相似形综合题.

分析：

- (1) 由相似三角形, 列出比例关系式, 即可证明;
 (2) 首先求出矩形 EFPQ 面积的表达式, 然后利用二次函数求其最大面积;
 (3) 本问是运动型问题, 要点是弄清矩形 EFPQ 的运动过程:
 (I) 当 $0 \leq t \leq 2$ 时, 如答图①所示, 此时重叠部分是一个矩形和一个梯形;
 (II) 当 $2 < t \leq 4$ 时, 如答图②所示, 此时重叠部分是一个三角形.

解答：

(1) 证明： \because 矩形 EFPQ,

$$\therefore EF \parallel BC, \therefore \triangle AHF \sim \triangle ADC, \therefore \frac{AH}{AD} = \frac{AF}{AC},$$

$$\because EF \parallel BC, \therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC, \therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore \frac{AH}{AD} = \frac{EF}{BC}.$$

(2) 解： $\because \angle B = 45^\circ, \therefore BD = AD = 4, \therefore CD = BC - BD = 5 - 4 = 1.$

$$\because EF \parallel BC, \therefore \triangle AEH \sim \triangle ABD, \therefore \frac{AH}{AD} = \frac{EH}{BD},$$

$$\because EF \parallel BC, \therefore \triangle AFH \sim \triangle ACD, \therefore \frac{AH}{AD} = \frac{HF}{CD},$$

$$\therefore \frac{EH}{BD} = \frac{HF}{CD}, \text{ 即 } \frac{EH}{4} = \frac{HF}{1}, \therefore EH = 4HF,$$

已知 $EF = x$, 则 $EH = x$.

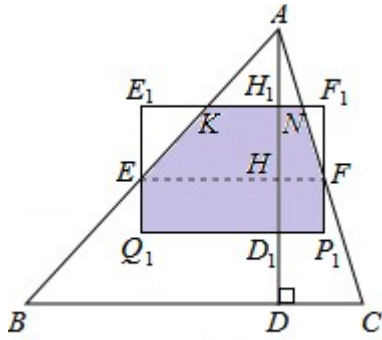
$$\because \angle B = 45^\circ, \therefore EQ = BQ = BD - QD = BD - EH = 4 - x.$$

$$S_{\text{矩形 EFPQ}} = EF \cdot EQ = x \cdot (4 - x) = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 5,$$

\therefore 当 $x = 2$ 时, 矩形 EFPQ 的面积最大, 最大面积为 5.

(3) 解：由 (2) 可知, 当矩形 EFPQ 的面积最大时, 矩形的长为 2, 宽为 $4 - 2 = 2$.
 在矩形 EFPQ 沿射线 AD 的运动过程中:

(I) 当 $0 \leq t \leq 2$ 时, 如答图①所示.



答图①

设矩形与AB、AC分别交于点K、N，与AD分别交于点H₁，D₁。

此时DD₁=t，H₁D₁=2，

∴HD₁=HD - DD₁=2 - t，HH₁=H₁D₁ - HD₁=t，AH₁=AH - HH₁=2 - t，

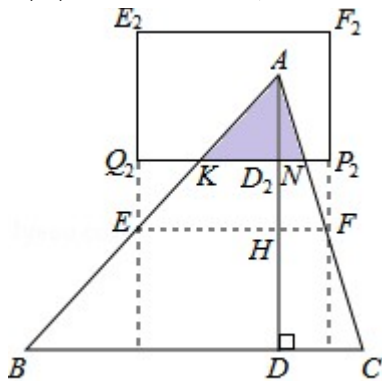
∵KN∥EF，∴ $\frac{KN}{EF} = \frac{AH_1}{AH}$ ，即 $\frac{KN}{\frac{5}{2}} = \frac{2-t}{2}$ ，得KN= (2 - t)。

$$S = S_{\text{梯形KNFE}} + S_{\text{矩形EFP}_1\text{Q}_1} = (KN+EF) \cdot HH_1 + EF \cdot EQ_1$$

$$= [(2-t) + \frac{5}{2}] \times t + (2-t) \cdot 2$$

$$= -\frac{5}{8}t^2 + 5;$$

(II) 当2 < t ≤ 4时，如答图②所示。



答图②

设矩形与AB、AC分别交于点K、N，与AD交于点D₂。

此时DD₂=t，AD₂=AD - DD₂=4 - t，

∵KN∥EF，∴ $\frac{KN}{EF} = \frac{AD_2}{AH}$ ，即 $\frac{KN}{\frac{5}{2}} = \frac{4-t}{2}$ ，得KN=5 - t。

$$S = S_{\triangle AKN} = KN \cdot AD_2$$

$$= (5-t) \cdot (4-t)$$

$$= t^2 - 5t + 10.$$

综上所述，S与t的函数关系式为：

$$S = \begin{cases} -\frac{5}{8}t^2 + 5 & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{5}{8}t^2 - 5t + 10 & (2 < t \leq 4) \end{cases} .$$

点评： 本题是运动型相似三角形压轴题，考查了相似三角形的判定与性质、二次函数的表达式与最值、矩形、等腰直角三角形等多个知识点，涉及考点较多，有一定的难度。难点在于第（3）问，弄清矩形的运动过程是解题的关键。