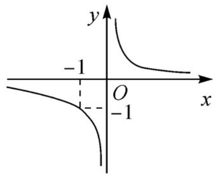
考点跟踪训练46　函数型综合问题

一、选择题

1．(2010·绥化)已知函数$y=$的图象如图所示，当$x\geq-1$时，y的取值范围是(　　)

A．$y<-1$ B．$y\leq-1$

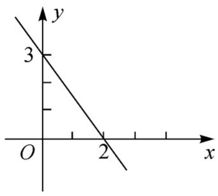
C．$y\leq-1$或$y>0$ D．$y<-1$或$y\geq0$



答案　C

解析　根据反比例函数的性质和图象，可知$x\geq-1$时，在第三象限为$y\leq-1$；在第一象限$y>0$，故选C.

2．(2010·贵阳)一次函数$y=kx+b$的图象如图所示，当$y<0$时，x的取值范围是(　　)



A．$x<0$ B．$x>0$ C．$x<2$ D．$x>2$

答案　D

解析　根据图象和数据可知，当$y<0$时，直线在x轴下方的部分，x的取值范围是$x>2$.

3．(2010·黔东南州)在直角坐标系中，若解析式为$y=2x^2-4x+5$的图象沿着x轴向左平移两个单位，再沿着y轴向下平移一个单位，此时图象的解析式为(　　)

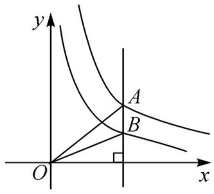
A．$y=2(x-3)^2+4$ B．$y=2(x-3)^2+2$

C．$y=2(x+1)^2+4$ D．$y=2(x+1)^2+2$

答案　D

解析　$y=2x^2-4x+5$配方得$y=2(x-1)^2+3$，由题意得$y=2(x-1+2)^2+3-1$，即$y=2(x+1)^2+2$.

4．(2010·孝感)双曲线$y=$与$y=$在第一象限内的图象如图所示，作一条平行于y轴的直线分别交双曲线于A、B两点，连接OA、OB，则△AOB的面积为(　　)



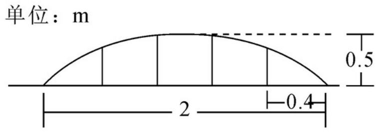
A．1 B．2 C．3 D．4

答案　A

解析　设直线AB交于x轴于C，则$S_{\triangle AOC}=\times4=2$，$S_{\triangle BOC}=\times2=1$，$\therefore S_{\triangle AOB}=2-1=1$.

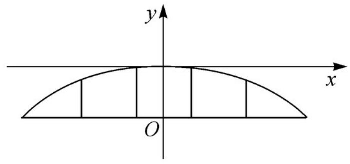
5．(2011·聊城)某公园草坪的防护栏是由100段形状相同的抛物线组成的．为了牢固起见，每段护栏需要间距0.4m加设一根不锈钢的支柱，防护栏的最高点距底部0.5 m(如图)，则这条防护栏需要不锈钢支柱的总长度至少为(　　)

A．50 m B．100 m C．160 m D．200 m



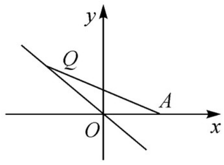
答案　C

解析　如图，以抛物线的顶点为坐标原点，平行于地面的直线为 x 轴建立坐标系；设函数解析式为 $y=ax^2$，当 $x=1$ 时，$y=-0.5$，所以 $a=-0.5$，$y=-0.5x^2$.当 $x=0.2$ 时，$y=-0.5\times0.2^2=-0.02$；当 $x=0.6$ 时，$y=-0.5\times0.6^2=-0.18$，所以每段防护栏的支柱长度为 $2\times=1.6$ 米，100 段防护栏的支柱总长为 $100\times1.6=160$ 米．



二、填空题

6．(2010·自贡)如图，点 Q 在直线 $y=-x$ 上运动，点 A 的坐标为(1,0)，当线段 AQ 最短时，点 Q 的坐标为____________．



答案

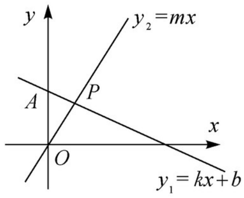
解析　当 AQ 垂直于直线 $y=-x$ 时，线段 AQ 最短．在 $\mathrm{Rt}\triangle AOQ$ 中，$AO=1$，$\angle AOQ=45°$，画 $QH\perp OA$ 于 H，则 $QH=OA=$，$OH=$，所以 Q.

7．(2011·怀化)出售某种手工艺品，若每个获利 x 元，一天可售出$(8-x)$个，则当 $x=$________元时，一天出售该种手工艺品的总利润 y 最大．

答案　4

解析　由题意，得 $y=x(8-x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，当 $x=4$ 时，y 有最大值．

8．(2010·武汉)如图，直线 $y_1=kx+b$ 过点 $A(0,2)$，且与直线 $y_2=mx$ 交于点 $P(1，m)$，则不等式组 $mx>kx+b>mx-2$ 的解集是______________．



答案　$1<x<2$

解析　由直线 $y_1=kx+b$ 过点 $A(0,2)$，$P(1，m)$，则有∴$y_1=(m-2)x+2$，故所求的不等式组可化为 $mx>(m-2)x+2>mx-2$，解得 $1<x<2$.

9．(2010·莆田)某同学利用描点法画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象时，列出的部分数据如下表：

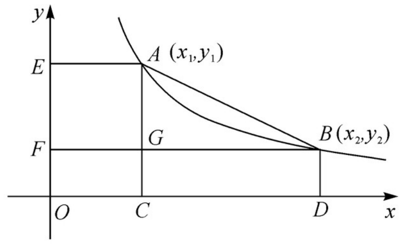
x	0	1	2	3	4
y	3	0	-2	0	3

经检查，发现表格中恰好有一组数据计算错误，请你根据上述信息写出该二次函数的解析式：____________.

答案　$y=x^2-4x+3$

解析　选取三点(0,3)，(1,0)，(3,0)，设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)(x-3)$，则 $a(0-1)(0-3)=3$，$a=1$，$\therefore y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$.

10．(2010·昆明)如图，点 $A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$都在双曲线 $y=(x>0)$上，且 $x_2-x_1=4$，$y_1-y_2=2$.分别过点 A、B 向 x 轴、y 轴作垂线段，垂足分别为 C、D、E、F，AC 与 BF 相交于 G 点，四边形 $FOCG$ 的面积为 2，五边形 $AEODB$ 的面积为 14，那么双曲线的解析式为________________.



答案　$y=$

解析　$\because x_2-x_1=4$，$y_1-y_2=2$，

$\therefore BG=4$，$AG=2.\therefore S_{\triangle AGB}=4$.

$\because S_{矩形AEOC}=S_{矩形OFBD}$，$S_{矩形FOCG}=2$，

$\therefore S_{矩形AEOC}=S_{矩形OFBD}=(S_{五边形AEODB}-S_{\triangle AGB}-S_{矩形FOCG})+S_{矩形FOCG}=(14-4-2)+2=6$，

即 $AE\cdot AC=6$，$\therefore k=6$，$\therefore y=$.

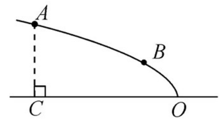
三、解答题

11．(2011·滨州)如图，某广场设计的一建筑物造型的纵截面是抛物线的一部分，抛物线的顶点 O 落在水平面上，对称轴是水平线 OC.点 A、B 在抛物线造型上，且点 A 到水平面的距离 $AC=4$ 米，点 B 到水平面距离为 2 米，$OC=8$ 米．

(1)请建立适当的直角坐标系，求抛物线的函数解析式；

(2)为了安全美观，现需在水平线 OC 上找一点 P，用质地、规格已确定的圆形钢管制作两根支柱 PA、PB 对抛物线造型进行支撑加固，那么怎样才能找到两根支柱用料最省(支柱与地面、造型对接方式的用料多少问题暂不考虑)时的点 P？(无需证明)

(3)为了施工方便，现需计算出点 O、P 之间的距离，那么两根支柱用料最省时，点 O、P 之间的距离是多少？(请写出求解过程)



解　(1)以点 O 为原点、射线 OC 为 y 轴的正半轴与射线 CA 平行方向为 x 轴正半轴建立直角坐标系，设抛物线的函数解析式为 $y=ax^2$，由题意知点 A 的坐标为(4,8)，且点 A 在抛物线上，

所以 $8=a\times4^2$，解得 $a=$ ，

故所求抛物线的函数解析式为 $y=x^2$.

(2)延长 AC，交建筑物造型所在抛物线于点 D,

则点 A、D 关于 OC 对称．

连接 BD 交 OC 于点 P，则点 P 即为所求．

(3)由题意知点 B 的横坐标为 2，且点 B 在抛物线上，所以点 B 的坐标为(2,2)．

又知点 A 的坐标为(4,8)，所以点 D 的坐标为(-4,8)．

设直线 BD 的函数解析式为 $y=kx+b$，

则有

解得 $k=-1$，$b=4$.

故直线 BD 的函数解析式为 $y=-x+4$，

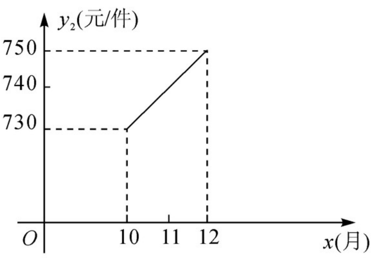
把 $x=0$ 代入 $y=-x+4$，得点 P 的坐标为(0,4)．

即两根支柱用料最省时，点 O、P 之间的距离是 4 米．

12．(2011·重庆)某企业为重庆计算机产业基地提供电脑配件．受美元走低的影响，从去年 1 至 9 月，该配件的原材料价格一路攀升，每件配件的原材料价格 y_1(元)与月份 $x(1\le x\le 9$，且 x 取整数)之间的函数关系如下表：

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
价格 y_1(元/件)	560	580	600	620	640	660	680	700	720

随着国家调控措施的出台，原材料价格的涨势趋缓，10 至 12 月每件配件的原材料价格 y_2(元)与月份 $x(10\le x\le 12$，且 x 取整数)之间存在如图所示的变化趋势：



(1)请观察题中的表格，用所学过的一次函数、反比例函数或二次函数的有关知识，直接写出 y_1 与 x 之间的函数关系式；根据如图所示的变化趋势，直接写出 y_2 与 x 之间满足的一次函数关系式；

(2)若去年该配件每件的售价为 1000 元，生产每件配件的人力成本为 50 元，其它成本 30 元，该配件在 1 至 9 月的销售量 p_1(万件)与月份 x 满足关系式 $p_1=0.1x+1.1(1\le x\le 9$，且 x 取整数)，10 至 12 月的销售量 p_2(万件)与月份 x 满足函数关系式 $p_2=-0.1x+2.9(10\le x\le 12$，且 x 取整数)．求去年哪个月销售该配件的利润最大？并求出这个最大利润；

(3)今年 1 至 5 月，每件配件的原材料价格均比去年 12 月上涨 60 元，人力成本比去年增加 20%，其它成本没有变化，该企业将每件配件的售价在去年的基础上提高 $a\%$，与此同时每月销售量均在去年 12 月的基础上减少 0.1 $a\%$.这样，在保证每月上万件配件销量的前提下，完成了 1 至 5 月的总利润 1700 万元的任务，请你参考以下数据，估算出 a 的整数值．(参考数据：$99^2=9801,98^2=9604,97^2=9409,96^2=9216,95^2=9025$)

解　(1)y_1 与 x 之间的函数关系式为 $y_1=20x+540$，

y_2 与 x 之间满足的一次函数关系式为 $y_2=10x+630$.

(2)去年 1 至 9 月时，销售该配件的利润

$w=p_1(1000-50-30-y_1)$

$=(0.1x+1.1)(1000-50-30-20x-540)$

$=(0.1x+1.1)(380-20x)=-2x^2+160x+418$

$=-2(x-4)^2+450(1\le x\le 9$，且 x 取整数)，

$\because -2<0, 1\le x\le 9$，$\therefore$当 $x=4$ 时，w 有最大值，且 $w=450$(万元)；

去年 10 至 12 月时，销售该配件的利润

$w=p_2(1000-50-30-y_2)$

$=(-0.1x+2.9)(1000-50-30-10x-630)$

$=(-0.1x+2.9)(290-10x)=(x-29)^2(10\leq x\leq 12$，且 x 取整数)，

当 $10\leq x\leq 12$ 时，$\because x<29$，$\therefore$ 自变量 x 增大，函数值 w 减小，

$\therefore$ 当 $x=10$ 时，w 有最大值，且 $w=361$(万元)．

$\because 450>361$，

$\therefore$ 去年 4 月销售该配件的利润最大，最大利润为 450 万元．

(3)去年 12 月份销售量为：$-0.1\times 12+2.9=1.7$(万件)，

今年原材料的价格为：$750+60=810$(元)，

今年人力成本为：$50\times(1+20\%)=60$(元)，

由题意，得 $5\times[1000(1+a\%)-810-60-30]\times 1.7(1-0.1a\%)=1700$，

设 $t=a\%$，整理，得 $10t^2-99t+10=0$，解得 $t=$.

$\because 97^2=9409,96^2=9216$，而 9401 更接近 9409.

$\therefore\approx 97$.

$\therefore t_1\approx 0.1$ 或 $t_2\approx 9.8$，$\therefore a_1\approx 10$ 或 $a_2\approx 980$.

$\because 1.7(1-0.1a\%)\geq 1$，$\therefore a_2\approx 980$ 舍去，$\therefore a\approx 10$.

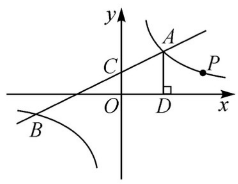
答：a 的整数值为 10.

13．(2011·河南)如图，一次函数 $y_1=k_1x+2$ 与反比例函数 $y_2=$ 的图象交于点 $A(4，m)$ 和 $B(-8，-2)$，与 y 轴交于点 C.

(1)$k_1=$______，$k_2=$________；

(2)根据函数图象可知，当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是______________；

(3)过点 A 作 $AD\perp x$ 轴于点 D，点 P 是反比例函数在第一象限的图象上一点．设直线 OP 与线段 AD 交于点 E，当 $S_{四边形ODAC}:S_{\triangle ODE}=3:1$ 时，求点 P 的坐标．



解　(1)，16.

(2)$-8<x<0$ 或 $x>4$.

(3)由(1)知，$y_1=x+2$，$y_2=$.

$\therefore m=4$，点 C 的坐标是(0,2)，点 A 的坐标是(4,4)．

$\therefore CO=2$，$AD=OD=4$.

$\therefore S_{梯形ODAC}=\cdot OD=\times 4=12$.

$\because S_{梯形ODAC}:S_{\triangle ODE}=3:1$，

$\therefore S_{\triangle ODE}=\times S_{梯形ODAC}=\times 12=4$.

即 $OD\cdot DE=4$，$\therefore DE=2$.

$\therefore$ 点 E 的坐标为(4,2)．

又点 E 在直线 OP 上，$\therefore$ 直线 OP 的解析式是 $y=x$.

$\therefore$ 直线 OP 与 $y_2=$ 的图象在第一象限内的交点 P 的坐标为(4 ，2)．