

## 数 学

一、选择题(本大题有 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.请选出每小题中一个最符合题意的选项,不选、多选、错选,均不给分)

1. 比较  $-3, 1, -2$  的大小,正确的是

- A.  $-3 < -2 < 1$       B.  $-2 < -3 < 1$       C.  $1 < -2 < -3$       D.  $1 < -3 < -2$

2. 计算  $(ab)^2$  的正确结果是

- A.  $2ab$       B.  $a^2b$       C.  $a^2b^2$       D.  $ab^2$

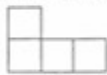
3. 太阳的温度很高,其表面温度大概有  $6\,000^\circ\text{C}$ ,而太阳中心的温度达到了  $19\,200\,000^\circ\text{C}$ ,用科学记数法可将  $19\,200\,000$  表示为

- A.  $1.92 \times 10^6$       B.  $1.92 \times 10^7$       C.  $19.2 \times 10^6$       D.  $0.192 \times 10^7$

4. 由 5 个相同的立方体搭成的几何体如图所示,则它的主视图是



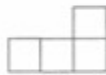
A.



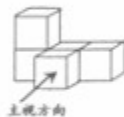
B.



C.



D.



第 4 题图

5. 一个不透明的袋子中有 2 个白球、3 个黄球和 1 个红球,这些球除颜色不同外其他完全相同.则从袋子中随机摸出一个球是白球的概率为

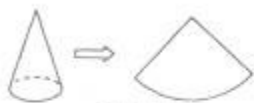
- A.  $\frac{1}{6}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{2}$

6. 不等式  $3x+2 > -1$  的解集是

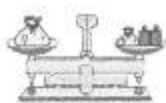
- A.  $x > -\frac{1}{3}$       B.  $x < -\frac{1}{3}$       C.  $x > -1$       D.  $x < -1$

7. 如图,圆锥的侧面展开图是半径为3,圆心角为 $90^\circ$ 的扇形,则该圆锥的底面周长为

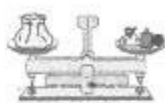
- A.  $\frac{3}{4}\pi$       B.  $\frac{3}{2}\pi$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{3}{2}$



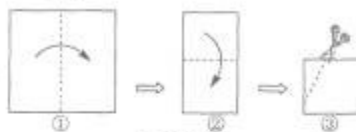
第7题图



第8题图1



第8题图2



第9题图

8. 如图1,天平呈平衡状态,其中左侧秤盘中有一袋玻璃球,右侧秤盘中也有一袋玻璃球,还有2个各20克的砝码.现将左侧袋中一颗玻璃球移至右侧秤盘,并拿走右侧秤盘的1个砝码后,天平仍呈平衡状态,如图2,则被移动的玻璃球质量为

- A. 10克      B. 15克      C. 20克      D. 25克

9. 将一张正方形纸片,按如图步骤①,②,沿虚线对折两次,然后沿③中的虚线剪去一个角,展开铺平后的图形是



A.



B.



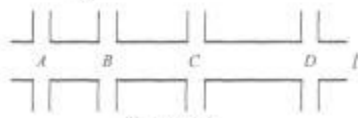
C.



D.

10. 如图,汽车在东西向的公路 $l$ 上行驶,途中 $A, B, C, D$ 四个十字路口都有红绿灯, $AB$ 之间的距离为800米, $BC$ 为1000米, $CD$ 为1400米,且 $l$ 上各路口的红绿灯设置为:同时亮红灯或同时亮绿灯,每次红(绿)灯亮的时间相同,红灯亮的时间与绿灯亮的时间也相同.若绿灯刚亮时,甲汽车从 $A$ 路口以每小时30千米的速度沿 $l$ 向东行驶,同时乙汽车从 $D$ 路口以相同的速度沿 $l$ 向西行驶,这两辆汽车通过四个路口时都没有遇到红灯.则每次绿灯亮的时间可能设置为

- A. 50秒      B. 45秒      C. 40秒      D. 35秒



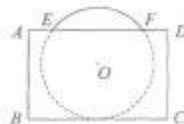
第10题图

二、填空题(本大题有6小题,每小题5分,共30分)

11. 分解因式: $a^2 - a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 把球放在长方体纸盒内,球的一部分露出盒外,其主视图如图, $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的边 $BC, AD$ 分别相切和相交( $E, F$ 是交点).已知 $EF = CD = 8$ ,则 $\odot O$ 的半径为

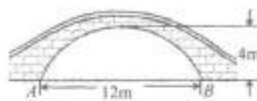
$\underline{\hspace{2cm}}$ .



第12题图

13. 如图的一座拱桥,当水面宽 $AB$ 为12m时,桥洞顶部离水面4m,已知桥洞的拱形是抛物线.以水平方向为 $x$ 轴,建立平面直角坐标系,若选取点 $A$ 为坐标原点时的抛物线解析式是 $y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4$ ,则选取点 $B$ 为坐标原点时的抛物线解析式是

$\underline{\hspace{2cm}}$ .



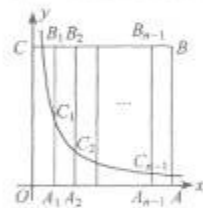
第13题图

14. 用直尺和圆规作 $\triangle ABC$ ,使 $BC = a, AC = b, \angle B = 35^\circ$ ,若这样的三角形只能作一个,则 $a, b$ 间满足的关系式是

$\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 如图,边长为 $n$ 的正方形 $OABC$ 的边 $OA, OC$ 在坐标轴上,点 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 为 $OA$ 的 $n$ 等分点,点 $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ 为 $CB$ 的 $n$ 等分点,连结 $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$ ,分别交曲线 $y = \frac{n-2}{x} (x > 0)$ 于点 $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ .若 $C_{15}B_{15} = 16C_{15}A_{15}$ ,则 $n$ 的值为

$\underline{\hspace{2cm}}$ . ( $n$ 为正整数)



第15题图

16. 把标准纸一次又一次对开,可以得到均相似的“开纸”.现在我们在长为 $2\sqrt{2}$ 、宽为1的矩形纸片中,画两个小矩形,使这两个小矩形的每条边都与原矩形纸的边平行,或小矩形的边在原矩形纸的边上,且每个小矩形均与原矩形纸相似,然后将它们剪下,则所剪得的两个小矩形纸片周长之和的最大值是

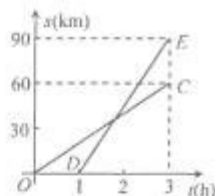
$\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题(本大题有8小题,第17~20小题每小题8分,第21小题10分,第22,23小题每小题12分,第24小题14分,共80分.解答需写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程)

17. (1) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1} - 4\sin 45^\circ - (1-\sqrt{2})^0 + \sqrt{8}$ .

(2) 先化简,再求值: $a(a-3b) + (a+b)^2 - a(a-b)$ ,其中 $a=1, b=-\frac{1}{2}$ .

18. 已知甲、乙两地相距 90 km, A, B 两人沿同一公路从甲地出发到乙地, A 骑摩托车, B 骑电动车. 图中  $DE, OC$  分别表示 A, B 离开甲地的路程  $s(\text{km})$  与时间  $t(\text{h})$  的函数关系的图象, 根据图象解答下列问题.

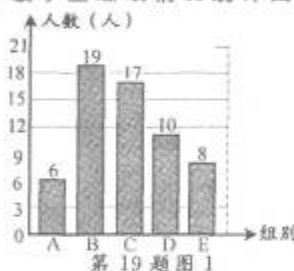


第 18 题图

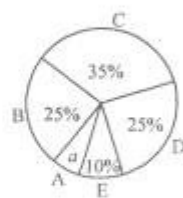
- (1) A 比 B 后出发几小时? B 的速度是多少?  
 (2) 在 B 出发后几小时, 两人相遇?
19. 为了解某校七、八年级学生的睡眠情况, 随机抽取了该校七、八年级部分学生进行调查. 已知抽取的七年级与八年级的学生人数相同, 利用抽样所得的数据绘制如下统计图表.

睡眠情况分组表(单位: 时)      七年级学生睡眠情况统计图      八年级学生睡眠情况统计图

组别	睡眠时间 $x$
A	$x < 7.5$
B	$7.5 \leq x < 8.5$
C	$8.5 \leq x < 9.5$
D	$9.5 \leq x < 10.5$
E	$x \geq 10.5$



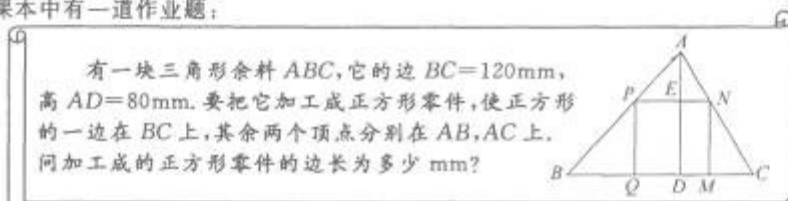
第 19 题图 1



第 19 题图 2

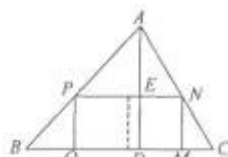
根据图表提供的信息, 回答下列问题:

- (1) 求统计图中的  $a$ .  
 (2) 抽取的样本中, 八年级学生睡眠时间在 C 组的有多少人?  
 (3) 已知该校七年级学生有 755 人, 八年级学生有 785 人. 如果睡眠时间  $x$ (时) 满足:  $7.5 \leq x < 9.5$ , 称睡眠时间合格. 试估计该校七、八年级学生中睡眠时间合格的共有多少人.
20. 课本中有一道作业题:

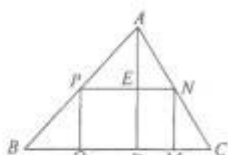


小颖解得此题的答案为 48mm. 小颖善于反思, 她又提出了如下的问题.

- (1) 如果原题中所要加工的零件是一个矩形, 且此矩形是由两个并排放置的正方形所组成, 如图 1, 此时, 这个矩形零件的两条边长又分别为多少 mm? 请你计算.  
 (2) 如果原题中所要加工的零件只是一个矩形, 如图 2, 这样, 此矩形零件的两条边长就不能确定, 但这个矩形面积有最大值, 求达到这个最大值时矩形零件的两条边长.



第 20 题图 1

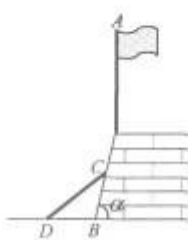


第 20 题图 2

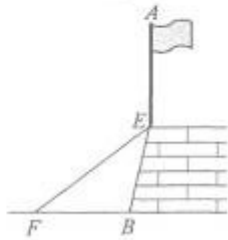
21. 九(1)班同学在上学期的社会实践活动中, 对学校旁边的山坡护墙和旗杆进行了测量.

- (1) 如图 1, 第一小组用一根木条  $CD$  斜靠在护墙上, 使得  $DB$  与  $CB$  的长度相等, 如果测量得到  $\angle CDB = 38^\circ$ , 求护墙与地面的倾斜角  $\alpha$  的度数.  
 (2) 如图 2, 第二小组用皮尺量得  $EF$  为 16 米 ( $E$  为护墙上的端点),  $EF$  的中点离地面  $FB$  的高度为 1.9 米, 请你求出  $E$  点离地面  $FB$  的高度.  
 (3) 如图 3, 第三小组利用第一、二小组的结果, 来测量护墙上旗杆的高度. 在点  $P$  测得旗杆顶端  $A$  的仰角为  $45^\circ$ , 向前走 4 米到达  $Q$  点, 测得  $A$  的仰角为  $60^\circ$ , 求旗杆  $AE$  的高度(精确到 0.1 米).

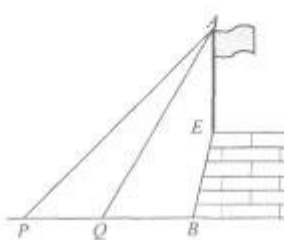
备用数据:  $\tan 60^\circ = 1.732, \tan 30^\circ = 0.577, \sqrt{3} = 1.732, \sqrt{2} = 1.414$ .



第 21 题图 1



第 21 题图 2



第 21 题图 3

22. 如果二次函数的二次项系数为1, 则此二次函数可表示为  $y=x^2+px+q$ , 我们称  $[p, q]$  为此函数的特征数, 如函数  $y=x^2+2x+3$  的特征数是  $[2, 3]$ .

(1) 若一个函数的特征数为  $[-2, 1]$ , 求此函数图象的顶点坐标.

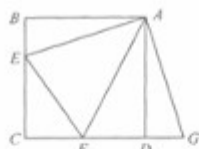
(2) 探究下列问题:

① 若一个函数的特征数为  $[4, -1]$ , 将此函数的图象先向右平移1个单位, 再向上平移1个单位, 求得到的图象对应的函数的特征数.

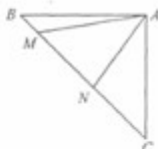
② 若一个函数的特征数为  $[2, 3]$ , 问此函数的图象经过怎样的平移, 才能使得到的图象对应的函数的特征数为  $[3, 4]$ ?

23. (1) 如图1, 正方形  $ABCD$  中, 点  $E, F$  分别在边  $BC, CD$  上,  $\angle EAF=45^\circ$ , 延长  $CD$  到点  $G$ , 使  $DG=BE$ , 连结  $EF, AG$ . 求证:  $EF=FG$ .

(2) 如图2, 等腰直角三角形  $ABC$  中,  $\angle BAC=90^\circ, AB=AC$ , 点  $M, N$  在边  $BC$  上, 且  $\angle MAN=45^\circ$ . 若  $BM=1, CN=3$ , 求  $MN$  的长.



第23题图1



第23题图2

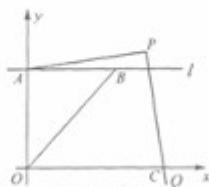


24. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线  $l$  平行  $x$  轴, 交  $y$  轴于点  $A$ , 第一象限内的点  $B$  在  $l$  上, 连结  $OB$ , 动点  $P$  满足  $\angle APQ=90^\circ$ ,  $PQ$  交  $x$  轴于点  $C$ .

(1) 当动点  $P$  与点  $B$  重合时, 若点  $B$  的坐标是  $(2, 1)$ , 求  $PA$  的长.

(2) 当动点  $P$  在线段  $OB$  的延长线上时, 若点  $A$  的纵坐标与点  $B$  的横坐标相等, 求  $PA:PC$  的值.

(3) 当动点  $P$  在直线  $OB$  上时, 点  $D$  是直线  $OB$  与直线  $CA$  的交点, 点  $E$  是直线  $CP$  与  $y$  轴的交点, 若  $\angle ACE=\angle AEC, PD=2OD$ , 求  $PA:PC$  的值.



第24题图

## 数学试卷参考答案

一、选择题(本大题有10小题, 满分40分)

1. A 2. C 3. B 4. B 5. C 6. C 7. B 8. A 9. B 10. D

二、填空题(本大题有6小题, 满分30分)

11.  $a(a-1)$

12. 5

13.  $y=-\frac{1}{9}(x+6)^2+4$

14.  $b=asin35^\circ$  或  $b \geq a$

15. 17

16.  $\frac{15}{4}+4\sqrt{2}$

三、解答题(本大题有8小题, 第17~20小题每小题8分, 第21小题10分, 第22, 23小题每小题12分, 第24小题14分, 共80分. 解答需写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程)

17. (本题满分8分)

解: (1) 原式  $= 2 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} = 1$ .

(2) 原式  $= a^2 - 3ab + a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + ab = a^2 + b^2$ ,

当  $a=1, b=-\frac{1}{2}$  时, 原式  $= 1^2 + (-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ .

18. (本题满分8分)

解: (1) A 比 B 后出发1小时, B 的速度是 20 km/h.

(2) 设直线  $DE$  的解析式为  $s=kt+b$ ,

把  $D(1, 0), E(3, 90)$  代入得  $\begin{cases} k+b=0, \\ 3k+b=90, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k=45, \\ b=-45. \end{cases}$

$\therefore$  直线  $DE$  的解析式为  $s=45t-45$ .

$\because$  直线  $OC$  的解析式为  $s=20t$ ,

由  $\begin{cases} s=45t-45, \\ s=20t, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} t=\frac{9}{5}, \\ s=36. \end{cases}$

$\therefore$  在 B 出发后 1.8 小时, 两人相遇.

19. (本题满分8分)

解: (1)  $a=5\%$ .

(2)  $60 \times 35\% = 21$  (人).

(3) 七年级:  $755 \times 60\% = 453$  (人), 八年级:  $785 \times 60\% = 471$  (人),  
共有  $453 + 471 = 924$  (人).

答: 该校七、八年级学生睡眠时间合格的共有 924 人.

20. (本题满分 8 分)

解: (1) 设  $PQ = x$ ,  $\because \triangle APN \sim \triangle ABC$ ,  $\therefore \frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD}$ ,  $\therefore \frac{2x}{120} = \frac{80-x}{80}$ ,

$$\text{解得 } x = \frac{240}{7}, \therefore PN = 2x = \frac{480}{7}.$$

$\therefore$  这个矩形两条边长分别为  $\frac{240}{7}$  mm,  $\frac{480}{7}$  mm.

(2) 设  $PQ = x$ ,  $\because \triangle APN \sim \triangle ABC$ ,  $\therefore \frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD}$ ,  $\therefore \frac{PN}{120} = \frac{80-x}{80}$ ,

$$\text{解得 } PN = 120 - \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore S = x \left( 120 - \frac{3}{2}x \right) = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = -\frac{3}{2}(x-40)^2 + 2400,$$

$\therefore$  当  $x = 40$  时, 即  $PQ = 40$  mm,  $PN = 60$  mm 时, 矩形面积最大.

21. (本题满分 10 分)

解: (1)  $a = 76^\circ$ .

(2) 过点  $E$  作  $EG \perp FB$ , 垂足为  $G$ ,

过  $EF$  的中点  $O$  作  $OH \perp FB$ , 垂足为  $H$ , 如图 1,

$\because OH = 1.9$ ,  $\therefore EG = 2OH = 3.8$ ,

$\therefore E$  点的高度为 3.8 米.

(3) 延长  $AE$  交直线  $PB$  于  $G$ , 如图 2, 设  $AG = x$ ,

在  $Rt\triangle QAG$  中,  $\tan \angle AQG = \frac{AG}{QG}$ , 得  $QG = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ,

在  $Rt\triangle PAG$  中,  $\tan \angle APG = \frac{AG}{PG}$ , 得  $PG = x$ .

$\because PQ + QG = PG$ ,

$$\therefore 4 + \frac{\sqrt{3}}{3}x = x, \text{ 解得 } x \approx 9.46,$$

$\therefore AE \approx 5.7$ ,

$\therefore$  旗杆  $AE$  的高度是 5.7 米.

22. (本题满分 12 分)

解: (1) 由题意得  $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ,

$\therefore$  特征数为  $[-2, 1]$  的函数图象的顶点坐标为  $(1, 0)$ .

(2) ① 特征数为  $[4, -1]$  的函数为  $y = x^2 + 4x - 1$ , 即  $y = (x+2)^2 - 5$ ,

$\because$  函数图象先向右平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位,

$$\therefore y = (x+2-1)^2 - 5 + 1, \text{ 即 } y = x^2 + 2x - 3,$$

$\therefore$  特征数为  $[2, -3]$ .

② 特征数为  $[2, 3]$  的函数为  $y = x^2 + 2x + 3$ , 即  $y = (x+1)^2 + 2$ ,

特征数为  $[3, 4]$  的函数为  $y = x^2 + 3x + 4$ , 即  $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ ,

$\therefore$  所求平移为: 先向左平移  $\frac{1}{2}$  个单位, 再向下平移  $\frac{1}{4}$  个单位.

注: 符合题意的其它平移, 也正确.

23. (本题满分 12 分)

(1) 证:  $\because$  正方形  $ABCD$  中,  $DG = BE$ ,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ ,

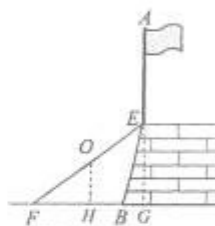
$\therefore \angle BAE = \angle GAD, AE = AG$ .

$\because \angle EAF = 45^\circ, \angle BAD = 90^\circ$ ,

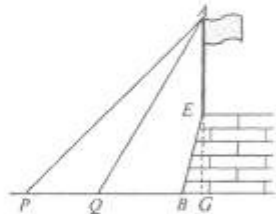
$\therefore \angle GAF = \angle EAF = 45^\circ$ ,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$ ,

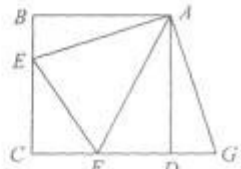
$\therefore EF = FG$ .



第 21 题图 1



第 21 题图 2



第 23 题图 1

(2)解:过点A作 $AG \perp AM$ ,使 $AG=AM$ ,连结 $NG,CG$ ,如图2,

则 $\angle BAM = \angle GAC$ ,

$\therefore \triangle BAM \cong \triangle CAG$ ,

$\therefore CG = BM = 1$ ,

$\because \angle MAN = 45^\circ, \angle BAC = 90^\circ$ ,

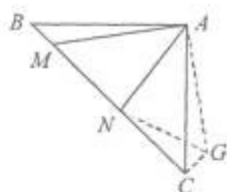
$\therefore \angle GAN = \angle MAN = 45^\circ$ ,

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle GAN$ ,

$\therefore MN = NG, \therefore \angle BCA + \angle ACG = 90^\circ$ ,

在 $Rt\triangle GCN$ 中, $NG = \sqrt{CN^2 + CG^2} = \sqrt{10}$ ,

$\therefore MN = NG = \sqrt{10}$ .



第23题图2

24. (本题满分14分)

解:(1) $PA = 2$ .

(2)如图1,过点P分别作 $PM \perp x$ 轴, $PN \perp y$ 轴,垂足为点M,N,

$\because$ 点A的纵坐标与点B的横坐标相等,

$\therefore \angle BOA = 45^\circ$ .

$\therefore$ 四边形 $OMPN$ 是正方形, $PM = PN$ ,

$\therefore \angle APN = \angle CPM$ ,

$\therefore Rt\triangle APN \cong Rt\triangle CPM$ ,

$\therefore PA : PC = 1$ .

(3)①如图2,点P在线段OB的延长线上,

过点P分别作 $PM \perp x$ 轴, $PN \perp y$ 轴,垂足为点M,N, $PM$ 与直线AC的交点为F,

$\because \angle CMP = \angle ANP = 90^\circ$ ,

$\angle APN = \angle CPM$ ,

$\therefore Rt\triangle APN \sim Rt\triangle CPM$ ,

$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PN}{PM}$ .

$\because \angle AEC = \angle ACE, AP \perp CP, \therefore P$ 为CE的中点,

$\because PM \parallel y$ 轴,

$\therefore F, M$ 分别为CA,OC的中点,

设 $OA = x$ ,

$\because PD = 2OD$ ,

$\therefore PF = 2x, FM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}x, PM = \frac{5}{2}x, CA = 2PF = 4x$ .

在 $Rt\triangle CAO$ 中, $OC = \sqrt{15}x$ ,

$\therefore PN = OM = \frac{1}{2}OC = \frac{\sqrt{15}}{2}x$ , 由 $\frac{PA}{PC} = \frac{PN}{PM}$ ,

得 $PA : PC = \frac{\sqrt{15}}{2}x : \frac{5}{2}x = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .

②点P在线段OB上,不符合题意.

③如图3,点P在线段OB的反向延长线上,

过点P分别作 $PM \perp x$ 轴, $PN \perp y$ 轴,垂足为点M,N, $PM$ 与直线AC的交点为F,

同理可得, $PM = \frac{3}{2}x$ ,

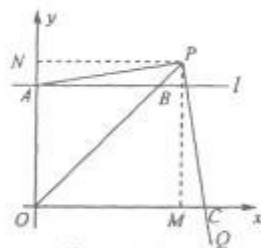
$CA = 2PF = 4x$ .

在 $Rt\triangle CAO$ 中, $OC = \sqrt{15}x$ ,

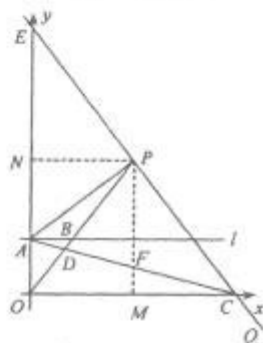
$\therefore PN = OM = \frac{1}{2}OC = \frac{\sqrt{15}}{2}x$ .

$\therefore PA : PC = \frac{\sqrt{15}}{2}x : \frac{3}{2}x = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .

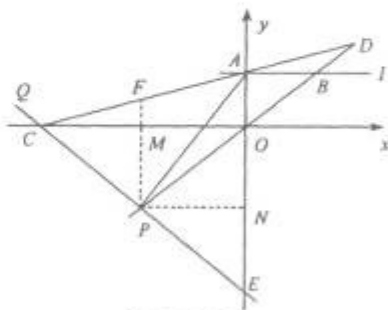
综上所述, $PA : PC$ 的值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ .



第24题图1



第24题图2



第24题图3

