与函数图象有关面积的求法

求解与函数图象有关的图形面积问题，在各类考试中常常出现，许多同学难以入手，实际上，求解这类问题的关键是画出图形后，设法将图形转化为三角形，再求出三角形的底和高。现分类例析如下。

一、　直线与坐标轴围成的面积: 例1 设直线$l_1: y = x - 1$交x轴于A，交y轴于D，直线$l_2: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$交y轴于B，且$l_1$与$l_2$交于C.求$\Delta ABC$的面积S.

解:画出略图.可见ΔABC的面积$S = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta ABD}$.只要求出底边长和高(点 C、A 的横坐标).

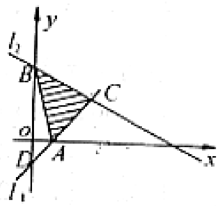

图 1

在

$y = x - 1, y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$中，分别令$x = 0$,得D（0,-1），B（0,$\frac{7}{2}$）；令$y = 0$,得A(1,0).再联立

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, \end{cases}$$

得 C(3,2)

$$\begin{aligned} \text{所以}S &= \frac{1}{2}DB \times x_c - \frac{1}{2}DB \times x_A \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{7}{2} - (-1)\right] \times 3 - \frac{1}{2}\left[\frac{7}{2} - (-1)\right] \times 1 \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

二、　直线与双曲线:例2 设直线y=-x+5与双曲线$y = \frac{4}{x}$交于A、B

两点，求ΔOAB的面积。

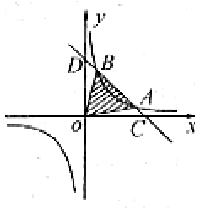

图 2

解：画出示意图，直接求ΔOAB的底边 AB 长和相应的高，比较困难。现割补法进行转化，记直线交 x 轴于点 C，交 y 轴于点 D，则所求面积 $S = S_{\Delta OCD} - S_{\Delta OCA} - S_{\Delta OBD}$.

在 y=-x+5 中，分别令 y=0,x=0,得 C（5，0），D（0，5）。

又由 $\begin{cases} y=-x+5 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$

得 A（4，1），B（1，4）

从而$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 5 \times 1 - \frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{15}{2}.$

三、　直线与抛物线

例 3　已知抛物线 $y = -x^2 + 2x + m$ 交 x 轴于两点 $A(x_1,0), B(x_2,0)$, 且 $x_1 < x_2, x_1^2 + x_2^2 = 10$.

又点 P（4，n）在该抛物线上，设抛物线的顶点是 C，求ΔACP的面积 S。

分析：将ΔACP分成两个ΔACD、ΔAPD，需求底边 AD 的长及相应的高，即点 C、点 P 的纵坐标。为此，首先需确定抛物线的解析式。

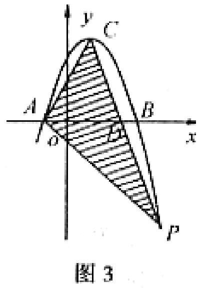

图 3

解：由$x^2_1+x^2_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2+2m=10$,得$m=3$.

所以抛物线是

$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,得$C(1,4)$.再令$y=0$,得$A(-1,0)$, $B(3,0)$;令$x=4$,得$P(4,-5)$.

又由顶点C（1，4），P（4，-5）可得直线PC:y=-3x+7.再令y=0,得PC与x轴交点为

D（$\frac{7}{3}$,0）.

$$\begin{aligned}所以S&=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta APD}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times4+\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times5\\&=15。\end{aligned}$$

例4 设直线l:y=2x+2交x轴于点A、交y轴于点B，一条抛物线过点A、点B及点（2，2），且与 x轴的另一交点为D，顶点为C。求四边形ABCD的面积。

简解：将四边形分成三个三角形：$\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta ODC$.易由直线l:y=2x+2,得A（-1，0），B（0，2）.

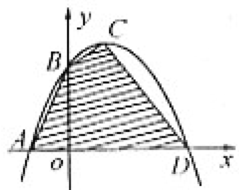

图4

又过A、B及（2，2）的抛物线为$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$,则顶点为$C(1,\frac{8}{3})$,与x轴的另一交点为D（3，0）。

所以$S=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times3\times\frac{8}{3}=6.$