

湖南省衡阳市 2013 年中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 3 分，满分 36 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. (3分) (2013·衡阳) -3 的相反数是 ()

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

考 相反数

点：

分 根据相反数的概念解答即可。

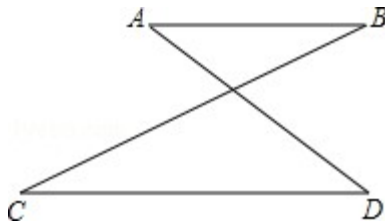
析：

解 解： -3 的相反数是 3，

答： 故选 A。

点 本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“ $-$ ”号；一个正数
评： 的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0。

2. (3分) (2013·衡阳) 如图，AB 平行 CD，如果 $\angle B=20^\circ$ ，那么 $\angle C$ 为 ()



A. 40°

B. 20°

C. 60°

D. 70°

考 平行线的性质。

点：

分 根据平行线性质的得出 $\angle C = \angle B$ ，代入求出即可。

析：

解 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle B=20^\circ$ ，

答： $\therefore \angle C = \angle B=20^\circ$ ，

故选 B。

点 本题考查了平行线性质的应用，注意：两直线平行，内错角相等。

评：

3. (3分) (2013·衡阳) “a 是实数， $|a| \geq 0$ ”这一事件是 ()

A. 必然事件

B. 不确定事件

C. 不可能事件

D. 随机事件

考 随机事件。

点：

分 根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念和绝对值的定义可正确解答。

析：

解 解：因为数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，

答：因为 a 是实数，

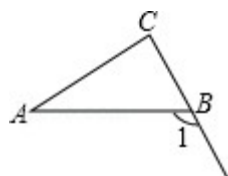
所以 $|a| \geq 0$.

故选 A .

点 用到的知识点为：必然事件指在一定条件下一定发生的事件 .

评：

4 . (3分) (2013·衡阳) 如图， $\angle 1=100^\circ$ ， $\angle C=70^\circ$ ，则 $\angle A$ 的大小是 ()



A . 10°

B . 20°

C . 30°

D . 80°

考 三角形的外角性质 .

点：

分 根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式进行计算即可得解 .

析：

解 解： $\because \angle 1=100^\circ$ ， $\angle C=70^\circ$ ，

答： $\therefore \angle A = \angle 1 - \angle C = 100^\circ - 70^\circ = 30^\circ$.

故选 C .

点 本题考查了三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，熟记性质是

评： 解题的关键 .

5 . (3分) (2013·衡阳) 计算 $\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2})^0$ 的结果为 ()

A . $2+\sqrt{2}$

B . $\sqrt{2}+1$

C . 3

D . 5

考 二次根式的乘除法；零指数幂 .

点：

专 计算题 .

题：

分 原式第一项利用二次根式的乘法法则计算，第二项利用零指数幂法则计算，即可得

析： 到结果 .

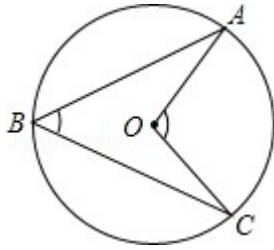
解 解：原式 $=2+1=3$.

答： 故选 C

点 此题考查了二次根式的乘除法，以及零指数幂，熟练掌握运算法则是解本题的关

评： 键 .

6 . (3分) (2013·衡阳) 如图，在 $\odot O$ 中， $\angle ABC=50^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 等于 ()



- A . 50° B . 80° C . 90° D . 100°

考 圆周角定理 .

点 :

分 因为同弧所对圆心角是圆周角的 2 倍, 即 $\angle AOC = 2 \angle ABC = 100^\circ$.

析 :

解 解: $\because \angle ABC = 50^\circ$,

答 : $\therefore \angle AOC = 2 \angle ABC = 100^\circ$.

故选 D .

点 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于

评 : 这条弧所对的圆心角的一半 .

7 . (3 分) (2013·衡阳) 要调查下列问题, 你认为哪些适合抽样调查 ()

① 市场上某种食品的某种添加剂的含量是否符合国家标准

② 检测某地区空气质量

③ 调查全市中学生一天的学习时间 .

- A . ①② B . ①③ C . ②③ D . ①②③

考 全面调查与抽样调查

点 :

分 由普查得到的调查结果比较准确, 但所费人力、物力和时间较多, 而抽样调查得到

析 : 的调查结果比较近似 .

解 解: ① 食品数量较大, 不易普查, 故适合抽查 ;

答 : ② 不能进行普查, 必须进行抽查 ;

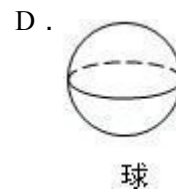
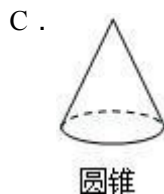
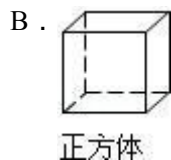
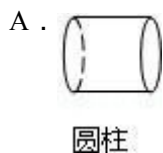
③ 人数较多, 不易普查, 故适合抽查 .

故选 D .

点 本题考查了抽样调查和全面调查的区别, 选择普查还是抽样调查要根据所要考查的

评 : 对象的特征灵活选用, 一般来说, 对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大时, 应选择抽样调查, 对于精确度要求高的调查, 事关重大的调查往往选用普查 .

8 . (3 分) (2013·衡阳) 下列几何体中, 同一个几何体的主视图与俯视图不同的是 ()



考点：简单几何体的三视图．

分析：

主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、侧面和上面看，所得到的图形．

解答：

解：A、圆柱的主视图与俯视图都是矩形，错误；

B、正方体的主视图与俯视图都是正方形，错误；

C、圆锥的主视图是等腰三角形，而俯视图是圆和圆心，正确；

D、球体主视图与俯视图都是圆，错误；

故选 C．

点评：本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图，俯视图是从物体的上面看得到的视图．

9. (3分) (2013•衡阳) 下列运算正确的是 ()

A. $3a+2b=5ab$

B. $a^3 \cdot a^2 = a^5$

C. $a^8 \cdot a^2 = a^4$

D. $(2a^2)^3 = -6a^6$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方．

分析：

根据同底数幂的除法，底数不变指数相减；合并同类项，系数相加字母和字母的指数不变；同底数幂的乘法，底数不变指数相加；幂的乘方，底数不变指数相乘，对各选项计算后利用排除法求解．

解答：解：A、不是同类项，不能合并，选项错误；

B、正确；

C、 $a^8 \cdot a^2 = a^{10}$ ，选项错误；

D、 $(2a^2)^3 = 8a^6$ ，选项错误．

故选 B．

点评：本题考查同底数幂的除法，合并同类项，同底数幂的乘法，幂的乘方很容易混淆，

一定要记准法则才能做题．

10. (3分) (2013•衡阳) 下列命题中，真命题是 ()

A. 位似图形一定是相似图形

B. 等腰梯形既是轴对称图形又是中心对称图形

C. 四条边相等的四边形是正方形

D. 垂直于同一直线的两条直线互相垂直

考点：命题与定理

分析：

根据位似图形的定义、等腰梯形的性质、正方形的判定、两直线的位置关系分别对

析： 每一项进行分析即可。

解： 解：A、位似图形一定是相似图形是真命题，故本选项正确；

答： B、等腰梯形既是轴对称图形，不是中心对称图形，原命题是假命题；

C、四条边相等的四边形是菱形，原命题是假命题；

D、同一平面内垂直于同一直线的两条直线互相垂直，原命题是假命题；

故选A。

点 此题考查了命题与定理，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题。判断命题

评： 的真假关键是要熟悉课本中的性质定理。

11. (3分) (2013·衡阳) 某药品经过两次降价，每瓶零售价由168元降为128元。已知两次降价的百分率相同，每次降价的百分率为 x ，根据题意列方程得 ()

A. $168(1+x)^2=128$ B. $168(1-x)^2=128$ C. $168(1-2x)=128$ D. $168(1-x^2)=128$

考 由实际问题抽象出一元二次方程。

点：

专 增长率问题。

题：

分 设每次降价的百分率为 x ，根据降价后的价格=降价前的价格(1-降价的百分率)，

析： 则第一次降价后的价格是 $168(1-x)$ ，第二次后的价格是 $168(1-x)^2$ ，据此即可列方程求解。

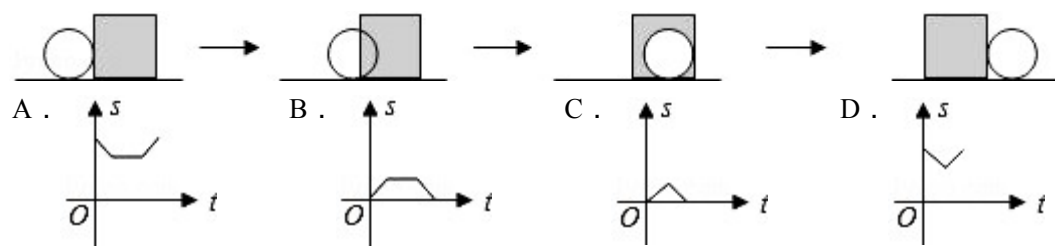
解： 解：根据题意得： $168(1-x)^2=128$ ，

答： 故选B。

点 此题主要考查了一元二次方程的应用，关键是根据题意找到等式两边的平衡条件，

评： 这种价格问题主要解决价格变化前后的平衡关系，列出方程即可。

12. (3分) (2013·衡阳) 如图所示，半径为1的圆和边长为3的正方形在同一水平线上，圆沿该水平线从左向右匀速穿过正方形，设穿过时间为 t ，正方形除去圆部分的面积为 S (阴影部分)，则 S 与 t 的大致图象为 ()



考 动点问题的函数图象。

点：

专 动点型。

题：

分 本题考查动点函数图象的问题。

析：

解： 解：由图中可知：在开始的时候，阴影部分的面积最大，可以排除B，C。

答： 随着圆的穿行开始，阴影部分的面积开始减小，当圆完全进入正方形时，阴影部分

的面积开始不再变化．应排除 D．

故选 A．

点评：本题应首先看清横轴和纵轴表示的量，然后根据实际情况采用排除法求解．

二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，满分 24 分）

13．（3 分）（2013•衡阳）计算 $(-4) \times (-\frac{1}{2}) = \underline{2}$ ．

考点：有理数的乘法．

点：

分析：根据有理数的乘法运算法则进行计算即可得解．

析：

解： $(-4) \times (-\frac{1}{2}) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ ．

答：

故答案为：2．

点评：本题考查了有理数的乘法运算，熟记运算法则是解题的关键，要注意符号的处理．

评：

14．（3 分）（2013•衡阳）反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(2, -1)$ ，则 k 的值为 $\underline{-2}$ ．

考点：待定系数法求反比例函数解析式．

点：

分析：将此点坐标代入函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 即可求得 k 的值．

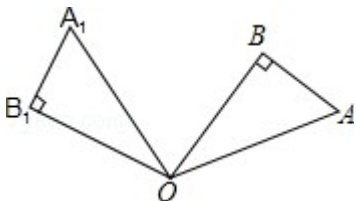
解：将点 $(2, -1)$ 代入解析式可得 $k = 2 \times (-1) = -2$ ．

答：故答案为：-2．

点评：本题比较简单，考查的是用待定系数法求反比例函数的比例系数，是中学阶段的重

点内容．

15．（3 分）（2013•衡阳）如图，在直角 $\triangle OAB$ 中， $\angle AOB = 30^\circ$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 100° 得到 $\triangle OA_1B_1$ ，则 $\angle A_1OB = \underline{70}$ ．



考点：旋转的性质．

点：

专 探究型．

题：

分 直接根据图形旋转的性质进行解答即可．

析：

解：∵将 $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 100° 得到 $\triangle OA_1B_1$ ， $\angle AOB=30^\circ$ ，

答：∴ $\triangle OAB \cong \triangle OA_1B_1$ ，

∴ $\angle A_1OB = \angle AOB = 30^\circ$ ．

∴ $\angle A_1OB = \angle A_1OA - \angle AOB = 70^\circ$ ．

故答案为：70．

点 本题考查的是旋转的性质，熟知图形旋转前后对应边、对应角均相等的性质是解答

评：此题的关键．

16．（3分）（2013•衡阳）某中学举行歌咏比赛，以班为单位参赛，评委组的各位评委给九（三）班的演唱打分情况为：89、92、92、95、95、96、97、，从中去掉一个最高分和一个最低分，余下的分数的平均数是最后得分，则该班的得分为94．

考 算术平均数．

点：

分 先去掉一个最低分去掉一个最高分，再根据平均数等于所有数据的和除以数据的个数列出算式进行计算即可．

解：由题意知，最高分和最低分为97，89，

答：则余下的分数的平均数= $(92 \times 2 + 95 \times 2 + 96) \div 5 = 94$ ．

故答案为：94．

点 本题考查了算术平均数，关键是根据平均数等于所有数据的和除以数据的个数列出

评：算式．

17．（3分）（2013•衡阳）计算： $\frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \underline{a-1}$ ．

考 分式的加减法．

点：

专 计算题．

题：

分 原式利用同分母分式的减法法则计算，约分即可得到结果．

析：

解：原式= $\frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a-1$ ．

故答案为： $a-1$ ．

点 此题考查了分式的加减法，分式的加减运算关键是通分，通分的关键是找最简公分

评：母．

18．（3分）（2013•衡阳）已知 $a+b=2$ ， $ab=1$ ，则 a^2b+ab^2 的值为2．

考 因式分解的应用．

点：

专 计算题 .

题：

分 所求式子提取公因式化为积的形式，将各自的值代入计算即可求出值 .

析：

解 解：∵ $a+b=2$ ， $ab=1$ ，

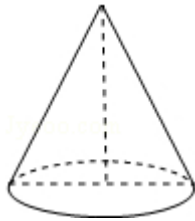
答：∴ $a^2b+ab^2=ab(a+b)=2$.

故答案为：2

点 此题考查了因式分解的应用，将所求式子进行适当的变形是解本题的关键 .

评：

19 . (3分) (2013·衡阳) 如图，要制作一个母线长为 8cm，底面圆周长是 $12\pi\text{cm}$ 的圆锥形小漏斗，若不计损耗，则所需纸板的面积是 $48\pi\text{cm}^2$.



考 圆锥的计算 .

点：

专 计算题 .

题：

分 圆锥的侧面积=底面周长×母线长÷2 .

析：

解 解：圆锥形小漏斗的侧面积= $\frac{1}{2} \times 12\pi \times 8 = 48\pi\text{cm}^2$.

答：故答案为 $48\pi\text{cm}^2$.

点

评： 本题考查了圆锥的计算，圆锥的侧面积= $\frac{1}{2}$ ×底面周长×母线长

20 . (3分) (2013·衡阳) 观察下列按顺序排列的等式： $a_1=1-\frac{1}{3}$ ， $a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ ，

$a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ ， $a_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ ，…，试猜想第 n 个等式 (n 为正整数)： $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$.

考 规律型：数字的变化类 .

点：

分 根据题意可知 $a_1=1-\frac{1}{1+2}$ ， $a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+2}$ ， $a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{3+2}$ ，…故 $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$.

解

答： 通过分析数据可知第 n 个等式为： $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$.

故答案为： $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$.

点 本题考查了数字变化规律，培养学生通过观察、归纳、抽象出数列的规律的能力，
评：要求学生首先分析题意，找到规律，并进行推导得出答案 .

三、解答题 (本大题共 8 个小题，满分 60 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤 .)

21 . (6 分) (2013·衡阳) 先化简，再求值： $(1+a) (1-a) + a(a-2)$ ，其中 $a = \frac{1}{2}$.

考 整式的混合运算—化简求值 .

点：

分 原式第一项利用平方差公式化简，第二项利用单项式乘多项式法则计算，去括号合
析：并得到最简结果，将 a 的值代入计算即可求出值 .

解 解：原式= $1 - a^2 + a^2 - 2a = 1 - 2a$ ，

答：当 $a = \frac{1}{2}$ 时，原式= $1 - 1 = 0$.

点 此题考查了整式的混合运算—化简求值，涉及的知识有：平方差公式，去括号法
评：则，以及合并同类项法则，熟练掌握公式及法则是解本题的关键 .

22 . (6 分) (2013·衡阳) 解不等式组： $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 < 2x \end{cases}$ ；并把解集在数轴上表示出来 .

考 解一元一次不等式组；在数轴上表示不等式的解集 .

点：

分 先求出不等式的解集，再根据不等式的解集找出不等式组的解集即可 .

析：

解：

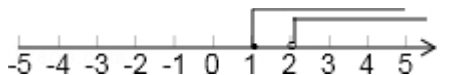
答：解： $\begin{cases} x-1 \geq 0 \text{①} \\ x+2 < 2x \text{②} \end{cases}$

∵ 解不等式①得： $x \geq 1$ ，

解不等式②得： $x > 2$ ，

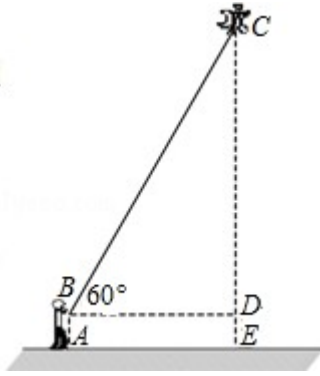
∴ 不等式组的解集为 $x > 2$ ，

在数轴上表示不等式组的解集为



点 本题考查了解一元一次不等式(组)，在数轴上表示不等式组的解集的应用，关键
评：是能根据不等式的解集找出不等式组的解集 .

23 . (6 分) (2013·衡阳) 如图，小方在五月一日假期中到郊外放风筝，风筝飞到 C 处时的线长为 20 米，此时小方正好站在 A 处，并测得 $\angle CBD = 60^\circ$ ，牵引底端 B 离地面 1.5 米，求此时风筝离地面的高度 (结果精确到个位)



考点：解直角三角形的应用-仰角俯角问题．

分析：

易得 $DE=AB$ ，利用 BC 长和 60° 的正弦值即可求得 CD 长，加上 DE 长就是此时风筝离地面的高度．

解：依题意得， $\angle CDB = \angle BAE = \angle ABD = \angle AED = 90^\circ$ ，

答： \therefore 四边形 $ABDE$ 是矩形，（1分）

$\therefore DE=AB=1.5$ ，（2分）

在 $Rt\triangle BCD$ 中， $\sin\angle CBD = \frac{CD}{BC}$ ，（3分）

又 $\because BC=20$ ， $\angle CBD=60^\circ$ ，

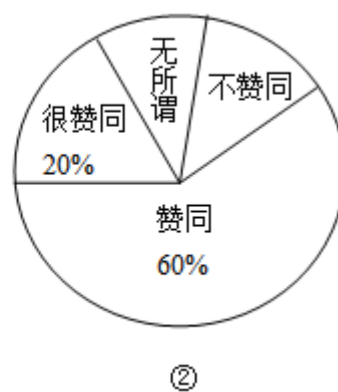
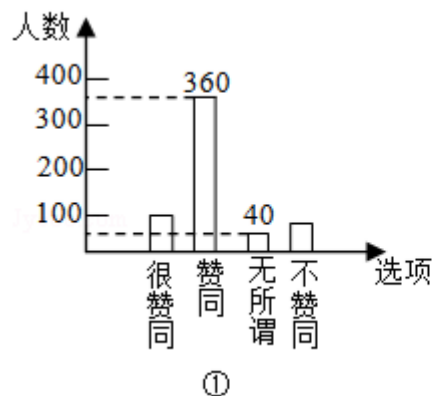
$\therefore CD=BC \cdot \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ ，（4分）

$\therefore CE=10\sqrt{3}+1.5$ ，（5分）

即此时风筝离地面的高度为 $(10\sqrt{3}+1.5)$ 米．

点评：考查仰角的定义，能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形是仰角问题常用的方法．

24．（6分）（2013•衡阳）目前我市“校园手机”现象越来越受到社会关注，针对这种现象，我市某中学九年级数学兴趣小组的同学随机调查了学校若干名家长对“中学生带手机”现象的看法，统计整理并制作了如下的统计图：



- 这次调查的家长总数为 600．家长表示“不赞同”的人数为 80；
- 从这次接受调查的家长中随机抽查一个，恰好是“赞同”的家长的概率是 60%；
- 求图②中表示家长“无所谓”的扇形圆心角的度数．

考点： 条形统计图；扇形统计图；概率公式．

分析：

- 分** (1) 根据赞成的人数与所占的百分比列式计算即可求调查的家长的总数，然后求出
析： 不赞成的人数；
(2) 根据扇形统计图即可得到恰好是“赞同”的家长的概率；
(3) 求出无所谓的人数所占的百分比，再乘以 360° ，计算即可得解．

解： (1) 调查的家长总数为： $360 \div 60\% = 600$ 人，

答： 很赞同的人数： $600 \times 20\% = 120$ 人，

不赞同的人数： $600 - 120 - 360 - 40 = 80$ 人；

(2) “赞同”态度的家长的概率是 60% ；

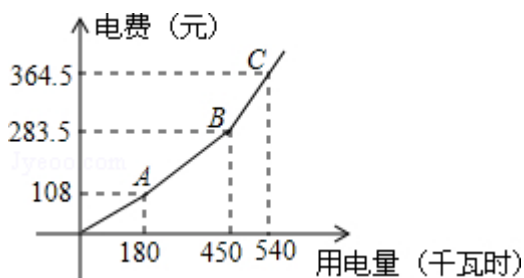
(3) 表示家长“无所谓”的圆心角的度数为： $\frac{40}{600} \times 360^\circ = 24^\circ$ ．

故答案为：600，80；60%．

点 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图
评： 中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数
据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

25．(8分) (2013·衡阳) 为了响应国家节能减排的号召，鼓励市民节约用电，我市从2012年7月1日起，居民用电实行“一户一表”的“阶梯电价”，分三个档次收费，第一档是用电量不超过180千瓦时实行“基本电价”，第二、三档实行“提高电价”，具体收费情况如右折线图，请根据图象回答下列问题；

- (1) 档用地阿亮是180千瓦时时，电费是 108 元；
(2) 第二档的用电量范围是 $180 < x < 450$ ；
(3) “基本电价”是 0.6 元/千瓦时；
(4) 小明家8月份的电费是328.5元，这个月他家用电多少千瓦时？



考 一次函数的应用．

点：

分 (1) 通过函数图象可以直接得出用电量为180千瓦时，电费的数量；

析： (2) 从函数图象可以看出第二档的用电范围；

(3) 运用总费用 \div 总电量就可以求出基本电价；

(4) 结合函数图象可以得出小明家8月份的用电量超过450千瓦时，先求出直线BC的解析式就可以得出结论．

解： (1) 由函数图象，得
答： 当用电量为 180 千瓦时，电费为：108 元。
 故答案为：108；

(2) 由函数图象，得
 设第二档的用电量为 x° ，则 $180 < x \leq 450$ 。

故答案为：180 < x ≤ 450

(3) 基本电价是：108 ÷ 180 = 0.6；
 故答案为：0.6

(4) 设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，由图象，得

$$\begin{cases} 364.5 = 540k + b \\ 283.5 = 450k + b \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k = 0.9 \\ b = -121.5 \end{cases}$

$$y = 0.9x - 121.5$$

$$y = 328.5 \text{ 时,}$$

$$x = 500$$

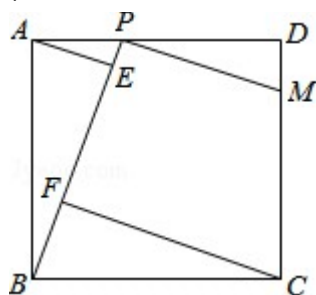
答：这个月他家用电 500 千瓦时。

点 本题考查了运用函数图象求自变量的取值范围的运用，待定系数法求一次函数的解
评： 析式的运用，由解析式通过自变量的值求函数值的运用，解答时读懂函数图象的意
 义是关键。

26. (8分) (2013·衡阳) 如图，P 为正方形 ABCD 的边 AD 上的一个动点，
 AE ⊥ BP，CF ⊥ BP，垂足分别为点 E、F，已知 AD = 4。

(1) 试说明 $AE^2 + CF^2$ 的值是一个常数；

(2) 过点 P 作 PM ∥ FC 交 CD 于点 M，点 P 在何位置时线段 DM 最长，并求出此时 DM 的
 值。



考 正方形的性质；二次函数的最值；全等三角形的判定与性质；勾股定理；相似三角
点： 形的判定与性质。

分 (1) 由已知 $\angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，结合 $\angle ABE = \angle BCF$ ，证明

析： $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ ，可得 $AE = BF$ ，于是 $AE^2 + CF^2 = BF^2 + CF^2 = BC^2 = 16$ 为常数；

(2) 设 $AP = x$ ，则 $PD = 4 - x$ ，由已知 $\angle DPM = \angle PAE = \angle ABP$ ， $\triangle PDM \sim \triangle BAP$ ，列出
 关于 x 的一元二次函数，求出 DM 的最大值。

解 解：(1) 由已知 $\angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，

答： 又 $\angle ABE + \angle FBC = \angle BCF + \angle FBC$ ，

$$\therefore \angle ABE = \angle BCF,$$

∵在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle BCF, \\ \angle AEB=\angle BFC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF$ (AAS) ,
 $\therefore AE=BF$,
 $\therefore AE^2+CF^2=BF^2+CF^2=BC^2=16$ 为常数；

(2) 设 $AP=x$, 则 $PD=4-x$,
 由已知 $\angle DPM=\angle PAE=\angle ABP$,
 $\therefore \triangle PDM \sim \triangle BAP$,
 $\therefore \frac{DM}{PD} = \frac{AP}{AB}$,
 即 $\frac{DM}{4-x} = \frac{x}{4}$,
 $\therefore DM = \frac{x(4-x)}{4} = x - \frac{1}{4}x^2$,
 当 $x=2$ 时, DM 有最大值为 1 .

点 本题主要考查正方形的性质等知识点, 解答本题的关键是熟练掌握全等三角形的判定定理以及三角形相似等知识, 此题有一定的难度, 是一道不错的中考试题 .

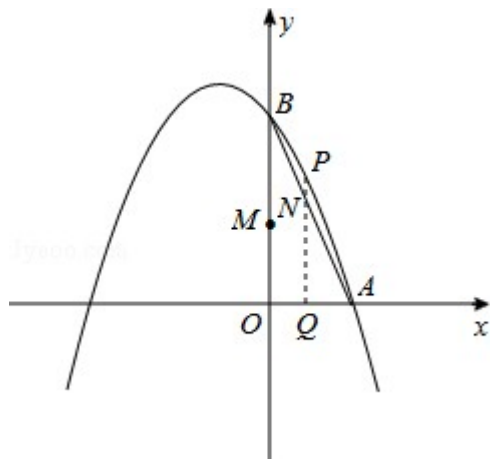
27. (10分) (2013·衡阳) 如图, 已知抛物线经过 $A(1, 0)$, $B(0, 3)$ 两点, 对称轴是 $x=-1$.

(1) 求抛物线对应的函数关系式；

(2) 动点 Q 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度在线段 OA 上运动, 同时动点 M 从 M 从 O 点出发以每秒 3 个单位长度的速度在线段 OB 上运动, 过点 Q 作 x 轴的垂线交线段 AB 于点 N , 交抛物线于点 P , 设运动的时间为 t 秒 .

① 当 t 为何值时, 四边形 $OMPQ$ 为矩形；

② $\triangle AON$ 能否为等腰三角形? 若能, 求出 t 的值; 若不能, 请说明理由 .



考 二次函数综合题
点 :

分 (1) 利用顶点式、待定系数法求出抛物线的解析式；
 析： (2) ①当四边形 OMPQ 为矩形时，满足条件 $OM=PQ$ ，据此列一元二次方程求解；
 ② $\triangle AON$ 为等腰三角形时，可能存在三种情形，需要分类讨论，逐一计算。

解： (1) 根据题意，设抛物线的解析式为： $y=a(x+1)^2+k$ ，

答： \because 点 A (1, 0)，B (0, 3) 在抛物线上，

$$\therefore \begin{cases} 4a+k=0 \\ a+k=3 \end{cases},$$

解得： $a=-1, k=4$ ，

\therefore 抛物线的解析式为： $y=-(x+1)^2+4$ 。

(2) ① \because 四边形 OMPQ 为矩形，

$\therefore OM=PQ$ ，即 $3t=-(t+1)^2+4$ ，

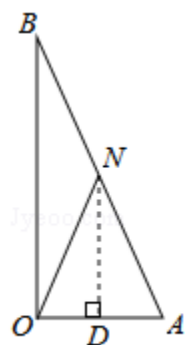
整理得： $t^2+5t-3=0$ ，

解得 $t=\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$ ，由于 $t=\frac{-5 - \sqrt{37}}{2} < 0$ ，故舍去，

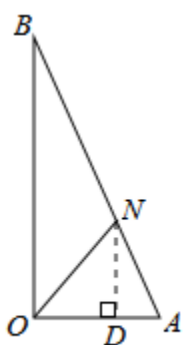
\therefore 当 $t=\frac{\sqrt{37}-5}{2}$ 秒时，四边形 OMPQ 为矩形；

②Rt $\triangle AOB$ 中， $OA=1, OB=3, \therefore \tan A=3$ 。

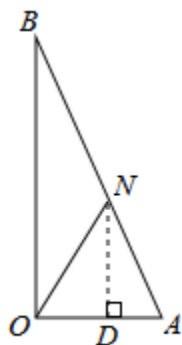
若 $\triangle AON$ 为等腰三角形，有三种情况：



答图1



答图2



答图3

(I) 若 $ON=AN$ ，如答图 1 所示：

过点 N 作 $ND \perp OA$ 于点 D，则 D 为 OA 中点， $OD=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore t=\frac{1}{2};$$

(II) 若 $ON=OA$ ，如答图 2 所示：

过点 N 作 $ND \perp OA$ 于点 D，设 $AD=x$ ，则 $ND=AD \cdot \tan A=3x$ ， $OD=OA-AD=1-x$ ，
 在 Rt $\triangle NOD$ 中，由勾股定理得： $OD^2+ND^2=ON^2$ ，

即 $(1-x)^2+(3x)^2=1^2$ ，解得 $x_1=\frac{1}{5}, x_2=0$ (舍去)，

$$\therefore x=\frac{1}{5}, OD=1-x=\frac{4}{5},$$

$$\therefore t=\frac{4}{5};$$

(III) 若 $OA=AN$ ，如答图 3 所示：

过点 N 作 $ND \perp OA$ 于点 D ，设 $AD=x$ ，则 $ND=AD \cdot \tan A=3x$ ，

在 $Rt\triangle AND$ 中，由勾股定理得： $ND^2+AD^2=AN^2$ ，

即 $(x)^2 + (3x)^2 = 1^2$ ，解得 $x_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ， $x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ (舍去)，

$$\therefore OD = 1 - x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore t = 1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$$

综上所述，当 t 为 $\frac{1}{2}$ 秒、 $\frac{4}{5}$ 秒， $(1 - \frac{\sqrt{10}}{10})$ 秒时， $\triangle AON$ 为等腰三角形。

点评： 本题考查了二次函数的图象与性质、待定系数法、解一元二次方程、勾股定理、解直角三角形、矩形性质、等腰三角形的性质等知识点，综合性比较强，有一定的难度。第 (2) 问为运动型与存在型的综合性问题，注意要弄清动点的运动过程，进行分类讨论计算。

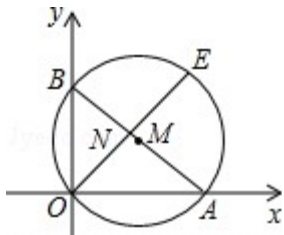
28. (10分) (2013·衡阳) 如图，在平面直角坐标系中，已知

$A(8, 0)$ ， $B(0, 6)$ ， $\odot M$ 经过原点 O 及点 A 、 B 。

(1) 求 $\odot M$ 的半径及圆心 M 的坐标；

(2) 过点 B 作 $\odot M$ 的切线 l ，求直线 l 的解析式；

(3) $\angle BOA$ 的平分线交 AB 于点 N ，交 $\odot M$ 于点 E ，求点 N 的坐标和线段 OE 的长。



考点： 圆的综合题。

专题：

综合题。

分析：

(1) 根据圆周角定理 $\angle AOB=90^\circ$ 得 AB 为 $\odot M$ 的直径，则可得到线段 AB 的中点即点 M 的坐标，然后利用勾股定理计算出 $AB=10$ ，则可确定 $\odot M$ 的半径为 5；

(2) 点 B 作 $\odot M$ 的切线 l 交 x 轴于 C ，根据切线的性质得 $AB \perp BC$ ，利用等角的余角相等得到 $\angle BAO = \angle CBO$ ，然后根据相似三角形的判定方法有

$Rt\triangle ABO \sim Rt\triangle BCO$ ，所以 $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OB}$ ，可解得 $OC = \frac{9}{2}$ ，则 C 点坐标为 $(-\frac{9}{2}, 0)$ ，最后

运用待定系数法确定 l 的解析式；

(3) 作 $ND \perp x$ 轴，连结 AE ，易得 $\triangle NOD$ 为等腰直角三角形，所以 $ND=OD$ ， $ON = \sqrt{2}ND$ ，再利用 $ND \parallel OB$ 得到 $\triangle ADN \sim \triangle AOB$ ，则 $ND : OB = AD : AO$ ，即 $ND :$

$6 = (8 - ND) : 8$ ，解得 $ND = \frac{24}{7}$ ，所以 $OD = \frac{24}{7}$ ， $ON = \frac{24\sqrt{2}}{7}$ ，即可确定 N 点坐

标；由于 $\triangle ADN \sim \triangle AOB$ ，利用 $ND : OB = AN : AB$ ，可求得 $AN = \frac{40}{7}$ ，则 $BN = 10 -$

$\frac{40}{7} = \frac{30}{7}$ ，然后利用圆周角定理得 $\angle OBA = \angle OEA$ ， $\angle BOE = \angle BAE$ ，所以

$\triangle BON \sim \triangle EAN$ ，再利用相似比可求出 ME ，最后由 $OE = ON + NE$ 计算即可。

解：(1) $\because \angle AOB = 90^\circ$ ，

答： $\therefore AB$ 为 $\odot M$ 的直径，

$\therefore A(8, 0)$ ， $B(0, 6)$ ，

$\therefore OA = 8$ ， $OB = 6$ ，

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 10$ ，

$\therefore \odot M$ 的半径为5；圆心 M 的坐标为 $(4, 3)$ ；

(2) 点 B 作 $\odot M$ 的切线 l 交 x 轴于 C ，如图，

$\because BC$ 与 $\odot M$ 相切， AB 为直径，

$\therefore AB \perp BC$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBO + \angle ABO = 90^\circ$ ，

而 $\angle BAO + \angle ABO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAO = \angle CBO$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABO \sim \text{Rt}\triangle BCO$ ，

$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OB}$ ，即 $\frac{6}{OC} = \frac{8}{6}$ ，解得 $OC = \frac{9}{2}$ ，

$\therefore C$ 点坐标为 $(-\frac{9}{2}, 0)$ ，

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，

把 $B(0, 6)$ 、 C 点 $(-\frac{9}{2}, 0)$ 分别代入 $\begin{cases} b = 6 \\ -\frac{9}{2}k + b = 0 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = 6 \end{cases}$ ，

\therefore 直线 l 的解析式为 $y = \frac{4}{3}x + 6$ ；

(3) 作 $ND \perp x$ 轴，连结 AE ，如图，

$\because \angle BOA$ 的平分线交 AB 于点 N ，

$\therefore \triangle NOD$ 为等腰直角三角形，

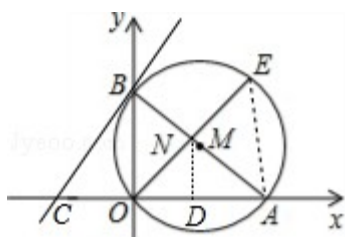
$\therefore ND = OD$ ，

$\therefore ND \parallel OB$ ，

$\therefore \triangle ADN \sim \triangle AOB$ ，

$\therefore ND : OB = AD : AO$ ，

$$\begin{aligned} \therefore ND : 6 &= (8 - ND) : 8, \text{ 解得 } ND = \frac{24}{7}, \\ \therefore OD &= \frac{24}{7}, ON = \sqrt{2}ND = \frac{24\sqrt{2}}{7}, \\ \therefore N \text{ 点坐标为 } &\left(\frac{24}{7}, \frac{24}{7}\right); \\ \therefore \triangle ADN &\sim \triangle AOB, \\ \therefore ND : OB &= AN : AB, \text{ 即 } \frac{24}{7} : 6 = AN : 10, \text{ 解得 } AN = \frac{40}{7}, \\ \therefore BN &= 10 - \frac{40}{7} = \frac{30}{7}, \\ \therefore \angle OBA &= \angle OEA, \angle BOE = \angle BAE, \\ \therefore \triangle BON &\sim \triangle EAN, \\ \therefore BN : NE &= ON : AN, \text{ 即 } \frac{30}{7} : NE = \frac{24\sqrt{2}}{7} : \frac{40}{7}, \text{ 解得 } NE = \frac{25\sqrt{2}}{7}, \\ \therefore OE &= ON + NE = \frac{24\sqrt{2}}{7} + \frac{25\sqrt{2}}{7} = 7\sqrt{2}. \end{aligned}$$



点 本题考查了圆的综合题：掌握切线的性质、圆周角定理及其推论；学会运用待定系数法求函数的解析式；熟练运用勾股定理和相似比进行几何计算。

四、附加题（本小题满分 0 分，不计入总分）

29. (2013·衡阳) 一种电讯信号转发装置的发射直径为 31km. 现要求：在一边长为 30km 的正方形城区选择若干个安装点，每个点安装一个这种转发装置，使这些装置转发的信号能完全覆盖这个城市. 问：

(1) 能否找到这样的 4 个安装点，使得这些点安装了这种转发装置后能达到预设的要求？在图 1 中画出安装点的示意图，并用大写字母 M、N、P、Q 表示安装点；

(2) 能否找到这样的 3 个安装点，使得在这些点安装了这种转发装置后能达到预设的要求？在图 2 中画出示意图说明，并用大写字母 M、N、P 表示安装点，用计算、推理和文字来说明你的理由.

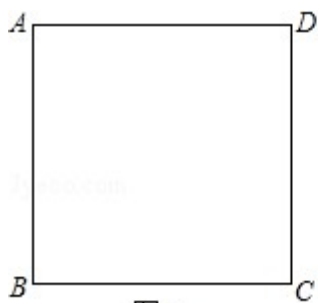


图1

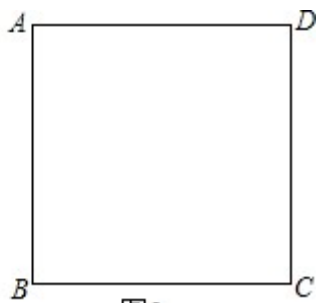


图2

考点：作图—应用与设计作图．

专题：

作图题．

分析：

(1) 可把正方形分割为四个全等的正方形，作出这些正方形的对角线，把装置放在交点处，交点到其余各个小正方形顶点的距离相等通过计算看是否适合；

(2) 由 (1) 得到启示，把正方形分割为三个长方形，左边的一个矩形的对角线能辐射的最大直径为 31，看能否把三个装置放在三个长方形的对角线的交点处．

解答：(1) 如图 1，将正方形等分成如图的四个小正方形，将这 4 个转发装置安装在这 4 个小正方形对角线的交点处，

此时，每个小正方形的对角线长为 $\frac{1}{2} \cdot 30\sqrt{2} = 15\sqrt{2} < 31$ ，每个转发装置都能完全覆盖一个小正方形区域，故安装 4 个这种装置可以达到预设的要求；

(2) (画图正确给 1 分)

将原正方形分割成如图 2 中的 3 个矩形，

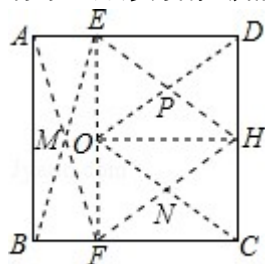


图2

使得 $BE = OD = OC$ ．将每个装置安装在这些矩形的对角线交点处，

则 $AE = \sqrt{31^2 - 30^2} = \sqrt{61}$ ， $DE = 30 - \sqrt{61}$ ，

$\therefore OD = \sqrt{(30 - \sqrt{61})^2 + 15^2} \approx 26.8 < 31$ ，

即如此安装三个这个转发装置，也能达到预设要求．

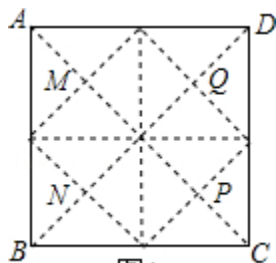


图1

点评：考查应用与设计作图；解决本题的关键是先利用常见图形得到合适的计算方法和思路，然后根据类比方法利用覆盖的最大距离得到相类似的解．