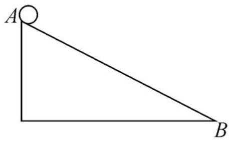
考点跟踪训练 49　方程、函数与几何相结合型综合问题

一、选择题

1．(2010·南充)如图，小球从点 A 运动到点 B，速度 v(米/秒)和时间 t(秒)的函数关系式是 $v=2t$.如果小球运动到点 B 时的速度为 6 米/秒，小球从点 A 到点 B 的时间是(　　)



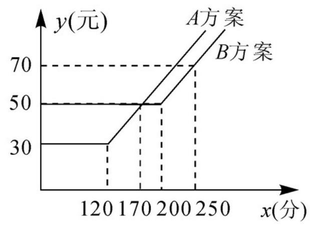
A．1 秒　　B．2 秒

C．3 秒　　D．4 秒

答案　C

解析　当 $v=6$ 时，$2t=6$，$t=3$.

2．(2010·鄂尔多斯)某移动通讯公司提供了 A、B 两种方案的通讯费用 y(元)与通话时间 x(分)之间的关系，如图所示，则以下说法错误的是(　　)



A．若通话时间少于 120 分，则 A 方案比 B 方案便宜 20 元

B．若通话时间超过 200 分，则 B 方案比 A 方案便宜

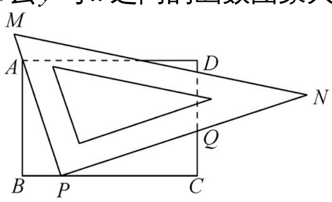
C．若通讯费用为 60 元，则 B 方案比 A 方案的通话时间多

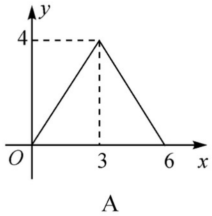
D．若两种方案通讯费用相差 10 元，则通话时间是 145 分或 185 分

答案　D

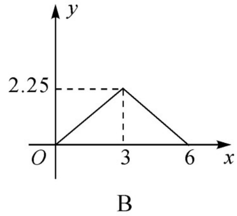
解析　A、B、C 正确，可排除，错误的是 D.

3．(2010·宿迁)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=6$，当直角三角板 MPN 的直角顶点 P 在 BC 边上移动时，直角边 MP 始终经过点 A，设直角三角板的另一直角边 PN 与 CD 相交于点 Q.$BP=x$，$CQ=y$，那么 y 与 x 之间的函数图象大致是(　　)

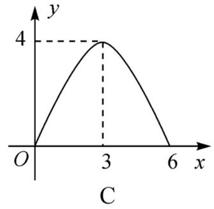




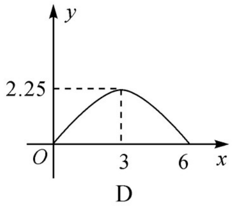
A



B



C

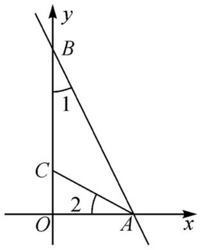


D

答案　D

解析　因为 $BP=x$，$CQ=y$，则 $AP^2=4^2+x^2$，$PQ^2=(6-x)^2+y^2$，$AQ^2=(4-y)^2+6^2$.在 Rt$\triangle APQ$ 中，有 $AP^2+PQ^2=AQ^2$，即$(4^2+x^2)+=(4-y)^2+6^2$，化简，得 $y=-x^2+x=-(x-3)^2+$，根据函数关系式，可知抛物线的顶点坐标为，选 D.

4．如图，直线 $y=-2x+4$ 与 x 轴、y 轴分别相交于 A、B 两点，C 为 OB 上一点，且 $\angle 1=\angle 2$，则 $S_{\triangle ABC}=($　　$)$



A．1 B．2　C．3 D．4

答案　C

解析　∵直线 $y=-2x+4$ 与 x 轴交于点 A、B 两点，

∴$A(2,0)$，$B(0,4)$，

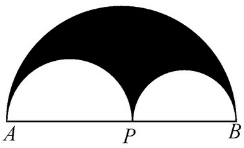
∴$OA=2$，$OB=4$.

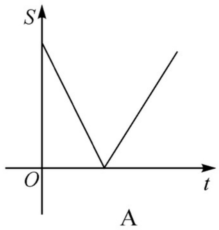
又∵$\angle 1=\angle 2$，$\angle AOC=\angle BOA$，

∴$\triangle OAC\backsim\triangle OBA$，$\therefore =$，

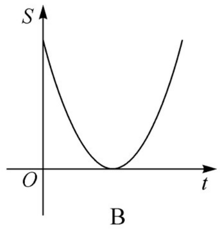
∴$OC==1$，$BC=OB-OC=3$，$S_{\triangle ABC}=\times 2\times 3=3$.

5．(2011·烟台)如图，AB 为半圆的直径，点 P 为 AB 上一动点，动点 P 从点 A 出发，沿 AB 匀速运动到点 B，运动时间为 t，分别以 AP 与 PB 为直径作半圆，则图中阴影部分的面积 S 与时间 t 之间的函数图象大致为(　　)

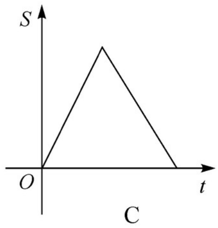




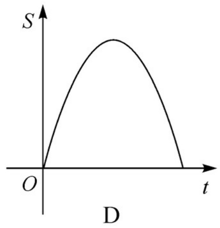
A



B



C



D

答案　D

解析　设 P 点运动速度为 v(常量)，$AB=a$(常量)，则 $AP=vt$，$PB=a-vt$.

则阴影部分面积

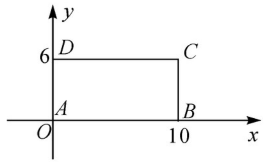
$S=\pi^2-\pi^2-\pi^2$

$=-t^2+$，

由函数关系式可知，抛物线开口向下，选 D.

二、填空题

6．已知平面上四点 $A(0,0)$，$B(10,0)$，$C(10,6)$，$D(0,6)$，直线 $y=mx-3m+2$ 将四边形分成面积相等的两部分，则 m 的值为__________．



答案

解析　∵直线 $y=mx-3m+2$ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分，

∴直线必经过矩形的中心对称点 O'.

∵根据矩形中心对称，可知 $O'(5,3)$，将它代入 $y=mx-3m+2$ 中，得：$3=5m-3m+2$，即 $m=$.

7．阅读材料：设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1，x_2，则两根与方程系数之间有如下关系：$x_1+x_2=-$ ，$x_1 \cdot x_2=$.根据该材料填空：

已知 x_1，x_2 是方程 $x^2+6x+3=0$ 的两实数根，则＋的值为________．

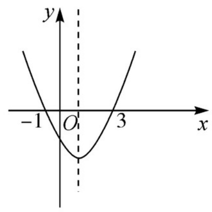
答案　10

解析　由题意，得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=3$，所以＋＝＝＝＝＝10.

8．如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，在下列说法中：

①$ac<0$；②方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $x_1=-1, x_2=3$；③ $a+b+c>0$；④当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大．

正确的说法有_____________．(把正确的答案的序号都填在横线上)



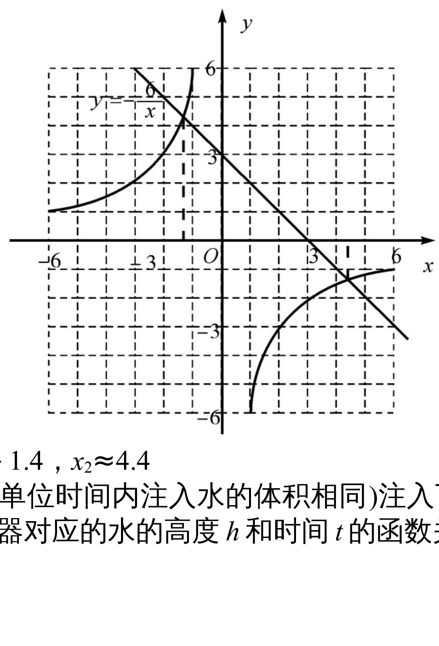
答案　①②④

解析　当 $-1<x<3$ 时，$y<0$；当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，所以说法③错误．

9．利用图象解一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 时，我们采用的一种方法是：在平面直角坐标系中画出抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=-x+3$，两图象交点的横坐标就是该方程的解．

(1)填空：利用图象解一元二次方程 $x^2+x-3=0$，也可以这样求解：在平面直角坐标系中画出抛物线 $y=$________和直线 $y=-x$，其交点的横坐标就是该方程的解；

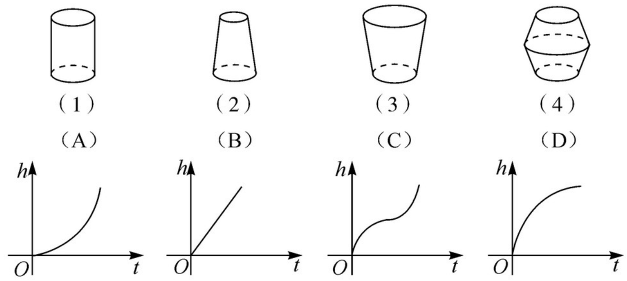
(2)已知函数 $y=-$的图象(如图所示)，利用图象求方程的近似解为：____________________(结果保留两个有效数字)．



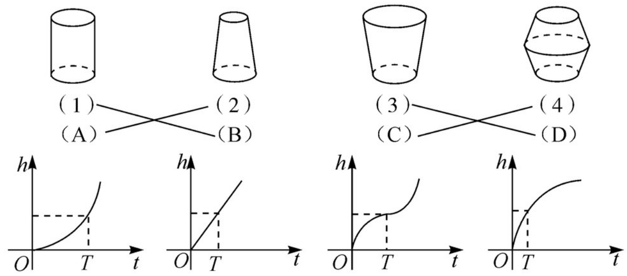
答案　(1)x^2-3；(2)$x_1\approx-1.4$，$x_2\approx4.4$

10．如图，水以恒速(即单位时间内注入水的体积相同)注入下面四种底面积相同的容器中，(1) 请分别找出与各容器对应的水的高度 h 和时间 t 的函数关系图象，用直线段连接

起来；(2) 当容器中的水恰好达到一半高度时，请在函数关系图的 t 轴上标出此时 t 值对应点 T 的位置．



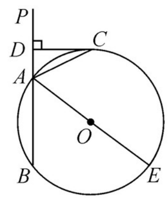
答案



解析　图象(1)是均匀变化的，为 B；图象(2)是先慢后快，为 A；图象(3)是先快后慢，为 D；图象(4)是先快后慢，最后再变快，为 C.

三、解答题

11．(2011·芜湖)如图，已知直线 PA 交⊙O 于 A、B 两点，AE 是⊙O 的直径．点 C 为⊙O 上一点，且 AC 平分∠PAE，过 C 作 $CD\perp PA$，垂足为 D.



(1)求证：CD 为⊙O 的切线；

(2)若 $DC+DA=6$，⊙O 的直径为 10，求 AB 的长度．

解　(1)证明：连接 OC，

∵点 C 在⊙O 上，$OA=OC$，∴$\angle OCA=\angle OAC$.

∵$CD\perp PA$，∴$\angle CDA=90°$，

∴$\angle CAD+\angle DCA=90°$.

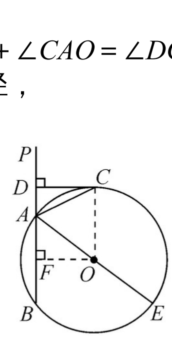
∵AC 平分∠PAE，

∴$\angle DAC=\angle CAO$.

∴$\angle DCO=\angle DCA+\angle ACO=\angle DCA+\angle CAO=\angle DCA+\angle DAC=90°$.

又∵点 C 在⊙O 上，OC 为⊙O 的半径，

∴CD 为⊙O 的切线．



(2)解：过 O 作 $OF\perp AB$，垂足为 F，

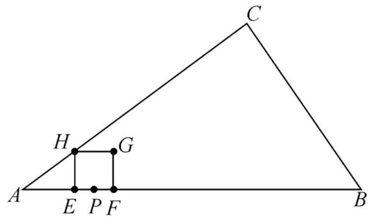
∴$\angle OCD=\angle CDA=\angle OFD=90°$，

∴四边形 $OCDF$ 为矩形，

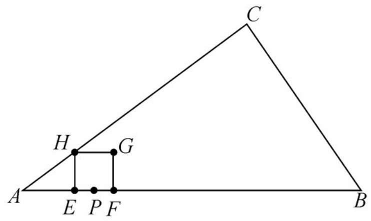
$\therefore OC = FD$，$OF = CD$.
$\because DC + DA = 6$，设 $AD = x$，则 $OF = CD = 6 - x$.
$\because \odot O$ 的直径为 10，$\therefore DF = OC = 5$，
$\therefore AF = 5 - x$.
在 Rt△AOF 中，由勾股定理得
$AF^2 + OF^2 = OA^2$.
即 $(5 - x)^2 + (6 - x)^2 = 25$，
化简得：$x^2 - 11x + 18 = 0$，
解得 $x = 2$ 或 $x = 9$.
由 $AD<DF$，知 $0<x<5$，故 $x = 2$.
$\therefore AD = 2, AF = 5 - 2 = 3$.
$\because OF \perp AB$，由垂径定理知，F 为 AB 的中点，
$\therefore AB = 2AF = 6$.

12．(2011·淮安)如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 8$，$BC = 6$，点 P 在 AB 上，$AP = 2$.点 E、F 同时从点 P 出发，分别沿 PA、PB 以每秒 1 个单位长度的速度向点 A、B 匀速运动，点 E 到达点 A 后立即以原速度沿 AB 向点 B 运动，点 F 运动到点 B 时停止，点 E 也随之停止．在点 E、F 运动过程中，以 EF 为边作正方形 $EFGH$，使它与△ABC 在线段 AB 的同侧，设 E、F 运动的时间为 t 秒($t > 0$)，正方形 $EFGH$ 与△ABC 重叠部分面积为 S.

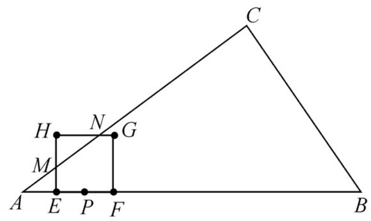
(1)当 $t = 1$ 时，正方形 $EFGH$ 的边长是__________；
当 $t = 3$ 时，正方形 $EFGH$ 的边长是__________；
(2)当 $0 < t ≤ 2$ 时，求 S 与 t 的函数关系式；
(3)直接答出：在整个运动过程中，当 t 为何值时，S 最大？最大面积是多少？



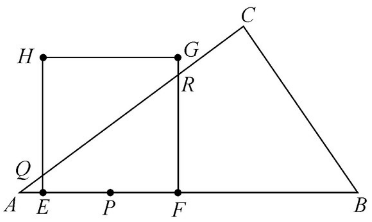
解　(1)2；4.
(2)当 $0 < t≤$时(如图)，S 与 t 的函数关系式是：
$S = S_{矩形EFGH} = (2t)^2 = 4t^2$；



当 $< t≤$时(如图)，S 与 t 的函数关系式是：
$S = S_{矩形EFGH} - S_{\triangle HMN} = 4t^2 - ××[2t - (2 - t)]^2 = - t^2 + t -$ ；



当 $< t≤2$ 时(如图)，S 与 t 的函数关系式是：
$S = S_{\triangle ARF} - S_{\triangle AQE} = ×(2 + t)^2 - ×(2 - t)^2$
$= 3t$.



(3)由(2)知：若 $0 < t \leq$ ，当 $t =$ 时 S 最大，其最大值 $S =$ ；

若 $< t \leq$ ，当 $t =$ 时 S 最大，其最大值 $S =$ ；

若 $< t \leq 2$，当 $t = 2$ 时 S 最大，其最大值 $S = 6$.

综上所述，当 $t = 2$ 时 S 最大，最大面积是 6.

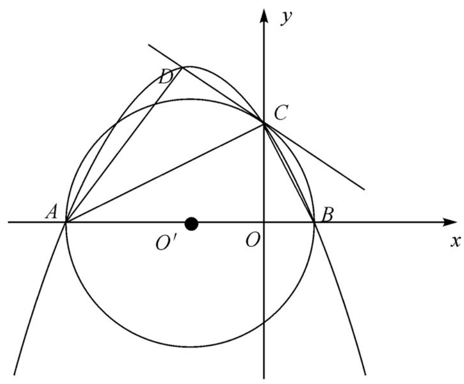
13．(2011·襄阳)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，AB 在 x 轴上，$AB = 10$，以 AB 为直径的⊙O'与 y 轴正半轴交于点 C，连接 BC、AC，CD 是⊙O'的切线，$AD \perp CD$ 于点 D，$\tan\angle CAD =$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 A、B、C 三点．

(1)求证：$\angle CAD = \angle CAB$；

(2)① 求抛物线的解析式；

② 判定抛物线的顶点 E 是否在直线 CD 上，并说明理由；

(3)在抛物线上是否存在一点 P，使四边形 $PBCA$ 是直角梯形．若存在，直接写出点 P 的坐标(不写求解过程)；若不存在，请说明理由．



解 (1)证明：连接 $O'C$.

∵CD 是⊙O'的切线，∴$O'C \perp CD$.

∵$AD \perp CD$，∴$O'C \parallel AD$，∴$\angle O'CA = \angle CAD$.

∵$O'C = O'A$，∴$\angle O'CA = \angle CAB$.

∴$\angle CAD = \angle CAB$.

(2)①∵AB 是⊙O'的直径，∴$\angle ACB = 90°$.

∵$OC \perp AB$，

∴$\angle CAB = \angle OCB$，

∴$\triangle CAO \backsim \triangle BCO$，

∴ = ，

即 $OC^2 = OA \cdot OB$.

∵$\tan\angle CAO = \tan\angle CAD =$ ，

∴$OA = 2OC$.

又∵$AB = 10$，

∴$OC^2 = 2OC \times (10 - 2OC)$．

∵$OC > 0$，

∴$OC = 4$，$OA = 8$，$OB = 2$.

∴$A(-8,0)$，$B(2,0)$，$C(0,4)$．

∵抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 A、B、C 三点，

由题意得解之得

∴$y = -x^2 - x + 4$.

② 设直线 DC 交 x 轴于点 F，易证$\triangle AOC \cong \triangle ADC$，

∴$AD=AO=8$.
∵$O'C\parallel AD$，
∴△$FO'C$∽△FAD，∴ = .
∴ = ，
∴$BF=$ ，∴$F($ ，$0)$．
设直线 DC 的解析式为 $y=kx+m$，

则即
∴$y=-x+4$.
由 $y=-x^2-x+4=-(x+3)^2+$ ，
得顶点 E 的坐标为 $E(-3$，$)$．
将 $E(-3$，$)$横坐标代入直线 DC 的解析式 $y=-x+4$ 中，右边 $=-\times(-3)+4=$.
∴抛物线的顶点 E 在直线 CD 上．
(3)存在．$P_1(-10$，$-6)$，$P_2(10$，$-36)$．