

有理数加法

含省略号的有理数加法，常用的方法和技巧有如下几种。

一、“顺写”加“倒写”

例1. 计算 $1+3+5+7+\dots+2001+2003$

解： 设

$$S=1+3+5+7+\dots+2001+2003$$

再把S倒过来写：

$$S=2003+2001+\dots+5+3+1$$

$$\begin{aligned} \text{相加得：} \quad 2S &= (1+2003)+(3+2001)+\dots+(2003+1) \\ &= 2004 \times 1002 \\ &= 2 \times 1002^2 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 1002^2$$

二、正负结合

例2. 计算 $1-2+3-4+5-6+\dots+2003-2004$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= (1-2)+(3-4)+(5-6)+\dots+(2003-2004) \\ &= (-1) \times 1002 \\ &= -1002 \end{aligned}$$

三、裂项相加

例3. 计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2003 \times 2004}$

$$\text{解：注意到} \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2004}\right) \\ &= \frac{2003}{2004} \end{aligned}$$

四、加倍相減

例4. 计算 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2003}$.

解：令原式

$$=S=1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2003}$$

$$\therefore 3S=3+3^2+3^3+\dots+3^{2004}$$

$$3S-S=3^{2004}-1$$

$$\therefore S=\frac{3^{2004}-1}{2}$$