高中数学教师专业能力考核试卷

学校：　　　　　　　　姓名：　　　　　得分：

一、单选题（本大题共 16 小题，每小题 3 分，共 48 分）

在下列各小题的四个选项中，只有一项的符合题目要求的

1．已知集合$A=\{x\mid y=\sqrt{2x-1}\}$，集合$B=\{x\mid 0\le x\le 1\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{2},1\right]$　　C．$[0,1]$　　D．$[0,+\infty)$

2．若复数$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，则$|z-2\mathrm{i}|=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{10}$　　D．10

3．数学是研究（　）的一门科学。

A．数量关系与空间形式　　B．数字与图形

C．计算与推理　　D．统计与概率

4．从两名男同学和四名女同学中随机选出三人参加数学竞赛，则恰好选出一名男同学和两名女同学的概率为（　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{1}{2}$

5．第九届亚冬会在哈尔滨举行，参加自由式滑雪女子大跳台决赛的六位选手的得分如下：119.50，134.75，154.75，159.50，162.75，175.50，则该组数据的第 40 百分位数为（　）

A．134.75　　B．144.75　　C．154.75　　D．159.50

6．已知随机变量X服从正态分布$N(3,\sigma^2)$，且$P(X>2)=0.7$，则$P(3<X<4)=$（　）

A．0.1　　B．0.2　　C．0.3　　D．0.4

7．曲线$y=f(x)=\ln(x^2+x-1)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为（　）

A．$y=3x-3$　　B．$y=2x-2$　　C．$y=x-1$　　D．$y=0$

8．双曲线 $y^2-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则该双曲线的焦点到它的渐近线距离为（ ）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

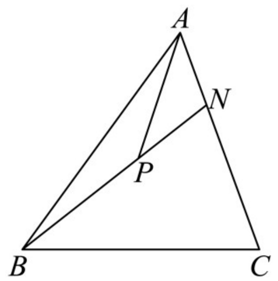
9．等差数列的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=5$，$S_5=10$，则 $S_8=$（ ）

A．8　　B．10　　C．12　　D．15

10．记 $\vee ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，面积为 $\sqrt{3}, B=60^\circ, a^2+c^2=3ac$，则 $b=$（ ）

A．$4\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．8　　D．2

11．如图，在 $\vee ABC$ 中，$AN=\frac{1}{3}NC$，P 是 BN 上的一点，若 $AP=mAB+\frac{1}{6}AC$，则实数 m 的值为（ ）



A．$\frac{9}{11}$　　B．$\frac{5}{11}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{5}$

12．将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的一半（纵坐标不变），再将图象向左平移

$\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到的函数的表达式为（ ）

A．$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　B．$y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　　C．$y=\sin\left(2x+\frac{7\pi}{12}\right)$　　D．$y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{11\pi}{24}\right)$

13．已知 $f(x)$ 为定义在 $(-4,4)$ 上的奇函数，若 $f(x)$ 在 $[0,4)$ 上单调递减，则满足不等式

$f(a+1)+f(1-a^2)>0$的实数a的取值范围是（　）

A．$(-\sqrt{5},+\infty)$　　B．$(-\sqrt{5},2)$　　C．$(-\sqrt{5},-1)\cup(2,\sqrt{5})$　D．$(-\sqrt{5},-1)\cup(1,\sqrt{5})$

14．已知直线l、m、n与平面α、β，下列命题正确的是（　）

A．若$l\perp n$，$m\perp n$，则$l//m$　　B．若$l\perp\alpha$，$l//\beta$，则$\alpha\perp\beta$

C．若$l//\alpha$，$l\perp m$，则$m\perp\alpha$　　D．若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$l\perp m$，则$l\perp\beta$

15．已知$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{\ln 2}{2}$，则a，b，c的大小关系为（　）

A．$b<c<a$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$a<c<b$

16．已知三棱锥$S-ABC$底面是边长为$\sqrt{3}$的正三角形，$SA\perp$平面ABC，且$SA=2\sqrt{3}$，则该三棱锥的外接球的体积为（　）

A．$\frac{32\pi}{3}$　　B．$4\sqrt{3}\pi$　　C．$\sqrt{6}\pi$　　D．$\frac{8\pi}{3}$

二、填空题（本大题共4小题，第小题4分，共16分）

17．已知$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_____．

18．在$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中，$x^2$的系数为_____．

19．高中数学学科核心素养包括_____，_____，数学建模，直观想象，数学运算与数据分析。

20．曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，则a的取值范围为___．

三、解答题（本大题共6小题，每小题6分，共36分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

21．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$b\cos A+a\cos B=-2c\cos C$．

(1)求C的大小；

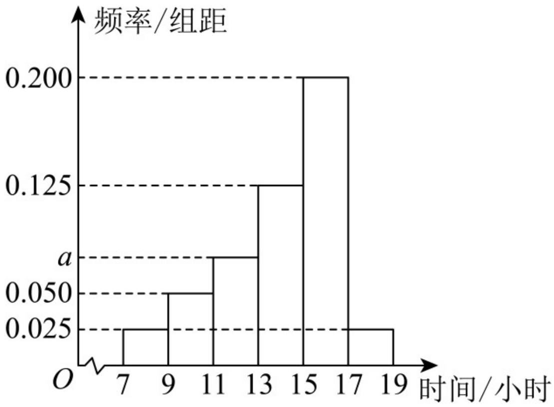
(2)若$b=2a$，且$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，求c.

22．已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，若$a_1=1$，且a_2，a_4，a_8成等比数列．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$；

23．为了更好地了解中学生的体育锻炼时间，某校展开了一次调查，从全校学生中随机选取100人，统计了他们一周参加体育锻炼时间（单位：小时），分别位于区间$[7,9),[9,11),[11,13),[13,15)$，$[15,17),[17,19]$，用频率分布直方图表示如下图．假设用频率估计概率，且每个学生参加体育锻炼时间相互独立．

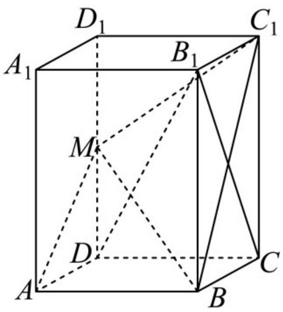


(1)求a的值；

(2)估计全校学生一周参加体育锻炼时间的第80百分位数；

(3)从全校学生中随机选取3人，记X表示这3人一周参加体育锻炼时间在区间$[13,15)$内的人数，求X的分布列和数学期望$E(X)$.

24．长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为棱DD_1的中点，$AB=1$，$AD=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$.



(1)求证：$AM\perp$平面B_1CD；

(2)求平面BMC_1与平面B_1CD的夹角的余弦值.

25．椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，上顶点为$M(0,1)$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)过点$(-1,-1)$的直线交椭圆C于A,B两点，设直线MA,MB的斜率分别为k_1,k_2，证明：k_1与k_2的和为定值.

26．已知函数$f(x)=(a-1)\ln x+x+\frac{a}{x}(a\in\mathrm{R})$．

(1)若$a=-2$，求函数$f(x)$的单调区间和极值；

(2)若存在$x\in(1,+\infty)$，使得$f(x)\le\frac{a}{x}$成立，求a的取值范围．

教师专业能力考核试题(高中数学)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	A	C	C	B	A	B	C	B
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	C	A	C	B	B	A				

1．B

【分析】求得集合A，再用交集运算求解.

【详解】由$2x-1\geq 0$解得，$x\geq\frac{1}{2}$，所以$A=\left\{x\mid x\geq\frac{1}{2}\right\}$，

所以$A\cap B=\left[\frac{1}{2},1\right]$，

故选：B.

2．C

【分析】根据复数的除法运算及模长计算公式即可求解．

【详解】$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}$，

则$|z-2\mathrm{i}|=|1-3\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$，

故选：C．

3．A

【分析】数学是研究数量关系与空间形式的一门科学

故选：A

4．C

【分析】根据古典概型的概率公式可得解.

【详解】六名同学选3名同学，有$\mathrm{C}_6^3=20$种选法，

其中恰好选出一名男同学和两名女同学有$\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_4^2=2\times 6=12$种选法，

所以$P=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$，

故选：C.

5．C

【分析】根据百分位数的定义求解.

【详解】六位选手得分由小到大排列如下：

119.50，134.75，154.75，159.50，162.75，175.50，

因为$6\times 40\% =2.4$，

所以该组数据的第40百分位数为第三个数154.75.

故选：C

6．B

【分析】利用正态分布的对称性即可得到结果.

【详解】因为随机变量X服从正态分布$N\left(3,\sigma^2\right)$，所以正态分布的对称轴为$x=3$，

所以$P(3<X<4)=P(2<X<3)=P(X>2)-0.5=0.2$，

故选：B

7．A

【分析】先求出导函数得出切线斜率，再应用点斜式写出直线方程.

【详解】$f(1)=0, f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}, f'(1)=3$，所求切线方程为$y=3x-3$．

故选：A.

8．B

【分析】根据离心率求出$c=\sqrt{5}$，$b=2$，得到焦点坐标和渐近线方程，利用点到直线距离公式求出答案.

【详解】$y^2-\dfrac{x^2}{b^2}=1$中，$a=1$，故$\dfrac{c}{a}=c=\sqrt{5}$，

故$b^2=c^2-a^2=5-1=4$，故$b=2$，

所以双曲线的焦点坐标为$\left(0,\pm\sqrt{5}\right)$，渐近线方程为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$，

所以该双曲线的焦点到它的渐近线距离为$\dfrac{\left|\pm\sqrt{5}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=2$

故选：B

9．C

【分析】由等差数列前项和公式列方程组求得a_1和公差d后可得结果.

【详解】设等差数列首项a_1和公差d，

由$S_2=5$，$S_5=10$，

则$\begin{cases}2a_1+d=5\\5a_1+10d=10\end{cases}$，解得$a_1=\frac{8}{3}$，$d=-\frac{1}{3}$

则$S_8=8\times\frac{8}{3}+\frac{8\times7}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=12$.

故选：C.

10．B

【分析】由三角形面积公式可得$ac=4$，再结合余弦定理即可得解.

【详解】由题意，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，

所以$ac=4,a^2+c^2=12$，

所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=12-2\times4\times\frac{1}{2}=8$，

解得$b=2\sqrt{2}$或$b=-2\sqrt{2}$（舍去）.

故选：B.

11．C

【分析】根据条件得到$AP=mAB+\frac{2}{3}AN$，由共线定理的推论得到方程，求出答案.

【详解】$AN=\frac{1}{3}NC$，故$AC=4AN$，

$AP=mAB+\frac{1}{6}AC$，故$AP=mAB+\frac{2}{3}AN$，

因为B,P,N三点共线，故$m+\frac{2}{3}=1$，解得$m=\frac{1}{3}$.

故选：C

12．A

【分析】利用三角函数图象变换可得出平移后所得函数的解析式.

【详解】将函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上所有点的横坐标缩短到原来的一半（纵坐标不变），

可得到函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，

再将所得函数的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，

可得到函数$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

故选：A.

13．C

【分析】根据奇函数的性质得$f(x)$在$(-4,4)$上单调递减，再根据奇函数性质将

$f(a+1)+f(1-a^2)>0$化为$f(a+1)>f(a^2-1)$，结合定义域利用单调性得$\begin{cases}-4<a+1<4\\-4<a^2-1<4\\a+1<a^2-1\end{cases}$，

解不等式组即可解答.

【详解】因为$f(x)$是奇函数，则$f(a+1)+f(1-a^2)>0$可化为

$f(a+1)>-f(1-a^2)=f(a^2-1)$.

又$f(x)$在$[0,4)$上单调递减且$f(x)$是定义在$(-4,4)$上的奇函数，所以$f(x)$在$(-4,4)$上单调递减．

则$\begin{cases}-4<a+1<4\\-4<a^2-1<4\\a+1<a^2-1\end{cases}$，解得$-\sqrt{5}<a<-1$或$2<a<\sqrt{5}$，

即实数a的取值范围是$(-\sqrt{5},-1)\cup(2,\sqrt{5})$．

故选：C

14．B

【分析】根据线面平行，线面垂直，线面垂直，面面垂直相关判定性质逐个判定即可.

【详解】对于A选项：若$l\perp n$，$m\perp n$，则l与m可能平行、相交或异面．像墙角三条线，所以不能得出平行，A错．

对于B选项：$l//\beta$，则β内有直线a与l平行，又$l\perp\alpha$，所以$a\perp\alpha$，a在β内，能推出$\alpha\perp\beta$，B对．

对于C选项：$l//\alpha$且$l\perp m$时，m与α位置不确定，m可在α内等，不能得出$m\perp\alpha$，C错．

对于D选项：$\alpha\perp\beta$，交线为m，$l\perp m$，则l可以在β内，可以与β平行，或与β相交但不垂直，位置不定，D错．

故选：B．

15．B

【分析】构造函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，求导可得其单调性，即可得到$a$最大，然后由作差法比较$b,c$的大小关系，即可得到结果.

【详解】设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$ ，即 $1-\ln x=0$ ，解得 $x=\mathrm{e}$ ，

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时， $f'(x)>0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时， $f'(x)<0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递减，

则 $x=\mathrm{e}$ 时， $f(x)$ 有极大值，即最大值，

又 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e})$ ， $b=\frac{\ln 3}{3}=f(3)$ ， $c=\frac{\ln 2}{2}=f(2)$ ，

所以 $f(2)<f(\mathrm{e}),f(3)<f(\mathrm{e})$ ，

且 $f(2)-f(3)=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}=\frac{3\ln 2-2\ln 3}{6}=\frac{\ln 8-\ln 9}{6}<0$ ，

所以 $f(2)<f(3)$ ，

综上可得， $f(2)<f(3)<f(\mathrm{e})$ ，即 $c<b<a$.

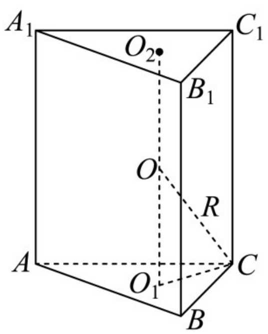
故选：B

16．A

【分析】将三棱锥补形成正三棱柱，利用它们有相同的外接球，结合正三棱柱的结构特征求出球半径即可.

【详解】如图，将三棱锥 $S-ABC$ 补成三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，点 S 与 A_1 重合，

正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球也为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球，令球心为 O ，半径为 R ，



记 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆的圆心分别为 O_1 和 O_2 ，其半径为 r ，

由正弦定理得：$r=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^{\circ}}=1$，而$O$为$O_1O_2$的中点，则$R=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

所以该三棱锥的外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$.

故选：A

17．$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$/$-\frac{7}{10}\sqrt{2}$

【分析】由同角三角函数的平方关系求得$\cos\alpha$，再根据两角和的余弦公式即可求解．

【详解】因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

故答案为：$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$．

18．60

【分析】由二项式展开式的通项公式写出其通项公式$T_{k+1}=(-1)^k\times2^{6-k}\times C_6^k\times x^{18-4k}$，令$18-4k=2$确定$k$的值，然后计算$x^2$项的系数即可.

【详解】展开式的通项公式$T_{k+1}=C_6^k\left(2x^3\right)^{6-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\times2^{6-k}\times C_6^k\times x^{18-4k}$，

令$18-4k=2$可得，$k=4$，

则x^2项的系数为$(-1)^4\times2^{6-4}\times C_6^4=4\times15=60$.

故答案为：60.

19．数学抽象，逻辑推理

分析：高中数学学科核心素养包括数学抽象，逻辑推理 ，数学建模，直观想象，数学运算

与数据分析

20．$(-2,1)$

【分析】将函数转化为方程，令$x^3-3x=-(x-1)^2+a$，分离参数a，构造新函数$g(x)=x^3+x^2-5x+1$,结合导数求得$g(x)$单调区间，画出大致图形数形结合即可求解.

【详解】令$x^3-3x=-(x-1)^2+a$，即$a=x^3+x^2-5x+1$，令$g(x)=x^3+x^2-5x+1(x>0)$,

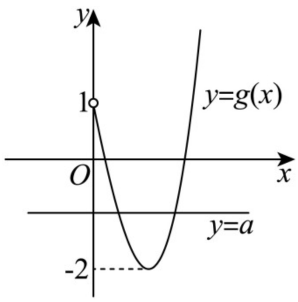
则$g'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$，令$g'(x)=0(x>0)$得$x=1$，

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g(0)=1,g(1)=-2$，

因为曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，

所以等价于$y=a$与$g(x)$有两个交点，所以$a\in(-2,1)$.



故答案为：$(-2,1)$

21．(1) $\frac{2\pi}{3}$

(2) $2\sqrt{7}$

【分析】（1）由已知及正弦定理可得：$\sin B\cos A+\sin A\cos B=-2\sin C\cos C$，化简可得

$\cos C=-\frac{1}{2}$，从而可求得C的值；

（2）由$b=2a$及$\vartriangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$可求得a,b，从而由余弦定理可解得c的值.

【详解】（1）因为$b\cos A+a\cos B=-2c\cos C$

所以$\sin B\cos A+\sin A\cos B=-2\sin C\cos C$

$\therefore \sin(B+A)=-2\sin C\cos C$.

又A,B,C为三角形内角，

$\therefore B+A=\pi-C$，

$\therefore \sin C=-2\sin C\cos C$.

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C>0$.

$\therefore \cos C=-\frac{1}{2}$，$\therefore C=\frac{2}{3}\pi$.

（2）$\because \vartriangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，

$\therefore ab=\frac{4\sqrt{3}}{\sin C}$.

由（1）知$C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore ab=8$，又$\because b=2a$，

$\therefore a=2$，$b=4$，

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+4^2-2\times2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$，

$\therefore c=2\sqrt{7}$.

22．(1) $a_n=n$

(2) $\frac{n}{n+1}$．

【分析】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，根据等比中项的性质得到方程，解得$d=1$，即可求出通项公式；

（2）由（1）可得$\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，再利用裂项相消法求和即可.

【详解】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，

因为a_2，a_4，a_8成等比数列，

所以$(a_4)^2=a_2\cdot a_8$．

即$(a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+7d)$，

即$d^2=a_1d$又$a_1=1$，且$d\neq 0$，解得$d=1$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n$．

（2）由（1）知：$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

则$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

即$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$．

23．(1) $a=0.075$

(2) 16.25

(3)分布列见解析，$\frac{3}{4}$

【分析】（1）利用频率分布直方图各个小矩形的面积和为1，即可求解；

（2）利用百分位数的求法，即可求解；

（3）根据条件可得 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$，再利用二项分布的概率公式求出 X 可能取值的概率，即可求出分布列，再利用期望的计算公式，即可求解.

【详解】（1）由 $(0.025+0.050+a+0.125+0.200+0.025)\times 2=1$，解得 $a=0.075$.

（2）因为 $(0.025+0.050+0.075+0.125)\times 2=0.5$，$0.200\times 2=0.400$，

所以第 80 百分位数为 $15+\frac{0.25}{0.4}\times 2=16.25$.

（3）从全校学生中随机选取 1 人，则此人一周参加课后活动的时间在区间 $[13,15)$ 的概率为 $0.125\times 2=0.25$，

又 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，由题意可得 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$，

则 $P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{27}{64}, P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}, P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$，

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

24．(1)证明见解析；

(2) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

【分析】（1）连接 DA_1，利用三角形相似得 $AM\perp A_1D$，由长方体结构特征及线面垂直的

性质得$CD \perp AM$，最后应用线面垂直的判定证明结论；

（2）构建合适的空间直角坐标系，应用向量法求面面角的余弦值.

【详解】（1）连接DA_1，根据长方体的结构特征易知$A_1B_1//AB//DC$，即A_1, B_1, D, C四点共面，

所以平面B_1CD即为平面CDA_1B_1，

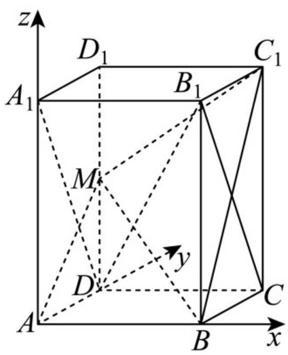
由M为棱DD_1的中点，$AB=1$，$AD=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，则$DM=\sqrt{2}$，

所以$\frac{DM}{AD}=\frac{AD}{A_1A}$，且$\angle A_1AD=\angle ADM=90^\circ$，则$\triangle A_1AD \sim \triangle ADM$，

所以$\angle DAM+\angle ADA_1=90^\circ$，则$AM \perp A_1D$，

而$CD \perp$平面ADD_1A_1，$AM \subset$平面ADD_1A_1，则$CD \perp AM$，

由$A_1D \cap CD=D$都在平面ADD_1A_1内，则$AM \perp$平面ADD_1A_1，即$AM \perp$平面B_1CD；



（2）由题设，可构建如图示的空间直角坐标系$A-xyz$，则

$B(1,0,0), C_1(1,2,2\sqrt{2}), M(0,2,\sqrt{2})$，

由（1）知平面B_1CD的一个法向量为$AM=(0,2,\sqrt{2})$，

又$BC_1=(0,2,2\sqrt{2})$，$MC_1=(1,0,\sqrt{2})$，若$m=(x,y,z)$是平面BMC_1的一个法向量，

所以$\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=2y+2\sqrt{2}z=0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MC_1}=x+\sqrt{2}z=0 \end{cases}$，取$z=-1$，则$\vec{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$，

所以$\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{AM}\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\vec{m}||\overrightarrow{AM}|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，即所求两个平面夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

25．(1)$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)证明见解析.

【分析】（1）根据给定条件，求出a,b即可得椭圆C的方程.

（2）当直线AB的斜率存在时，设出其方程并与椭圆方程联立，利用韦达定理，结合斜率坐标公式计算推理得证，再验证斜率不存在的情况即可.

【详解】（1）由椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上顶点为$M(0,1)$，得$b=1$，

由椭圆C的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$a=\sqrt{2}$，

所以椭圆C的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）当直线AB的斜率存在时，设其方程为$y=k(x+1)-1,k\neq 2$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} y=kx+k-1 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$消去$x$得：$(2k^2+1)x^2+4k(k-1)x+2(k-1)^2-2=0$，

$\Delta=16k^2(k-1)^2-8(2k^2+1)[(k-1)^2-1]=8(k^2+2k)>0$，解得$k<-2$或$k>0$，

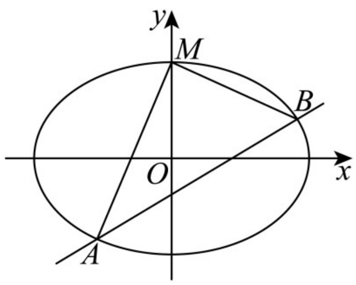
$x_1+x_2=-\dfrac{4k^2-4k}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2k^2-4k}{2k^2+1}$，$k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1}=k+\dfrac{k-2}{x_1},k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2}=k+\dfrac{k-2}{x_2}$，

因此$k_1+k_2=2k+\dfrac{k-2}{x_1}+\dfrac{k-2}{x_2}=2k+(k-2)\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2$，

当直线AB斜率不存在时，由$\begin{cases}x=-1\\x^2+2y^2=2\end{cases}$，得$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

不妨令$A(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}),B(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，则$k_1+k_2=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0-(-1)}+\frac{1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{0-(-1)}=2$，

所以k_1与k_2的和为定值2.



26．(1)增区间为$(0,1)$和$(2,+\infty)$，减区间为$(1,2)$，极大值-1，极小值$1-3\ln2$；

(2)$(-\infty,1-e]$

【分析】(1)将$a=-2$代入函数解析式，利用导数判断其单调性和极值即可；

(2)问题等价于存在$x\in(1,+\infty)$，$(a-1)\le\frac{-x}{\ln x}$，设$h(x)=\frac{-x}{\ln x}$，利用导数求函数$h(x)$在$(1,+\infty)$上的最大值，进而可得出答案．

【详解】（1）若$a=-2$，则$f(x)=-3\ln x+x-\frac{2}{x}(x>0)$，

则$f'(x)=-\frac{3}{x}+1+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，可得$0<x<1$或$x>2$；令$f'(x)<0$，可得$1<x<2$，

所以该函数增区间为$(0,1)$和$(2,+\infty)$，减区间为$(1,2)$，

当$x=1$时取得极大值-1，当$x=2$时取得极小值$1-3\ln2$；

（2）因为存在$x\in(1,+\infty)$，有$f(x)\le\frac{a}{x}$成立，

所以存在$x\in(1,+\infty)$，有$f(x)-\frac{a}{x}\le 0$成立，即存在$x\in(1,+\infty)$，$(a-1)\ln x+x\le 0$．

因为$\ln x>0$，所以存在$x\in(1,+\infty)$，$(a-1)\le\frac{-x}{\ln x}$，

设$h(x)=\frac{-x}{\ln x}$，其中$x\in(1,+\infty)$，则$h'(x)=\frac{-\ln x+1}{(\ln x)^2}$，

因为$x\in(1,+\infty)$，所以$(\ln x)^2>0$，

当$-\ln x+1\ge 0$时，$h'(x)\ge 0$，

因此$h(x)$在$(1,\mathrm{e}]$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，

所以$h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=-\mathrm{e}$，

所以$a-1\le-\mathrm{e}$，即$a\le 1-\mathrm{e}$，

故a的取值范围为$(-\infty,1-\mathrm{e}]$．