

# 2025年度教师专业能力考核

## 高中数学卷

### 一、单选题

1. 设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$ , 则  $(A \cup B) \cap C =$

A.  $\{-1, 1\}$

B.  $\{0, 1\}$

C.  $\{-1, 0, 1\}$

D.  $\{2, 3, 4\}$

2. 设复数  $z$  满足  $(1+i)z = 3+i$ , 则  $|z| =$  ( )

A.  $\sqrt{2}$

B. 2

C.  $2\sqrt{2}$

D.  $\sqrt{5}$

3. 命题“ $\exists x > 0, x^2 - x > 0$ ”的否定是 ( )

A.  $\forall x > 0, x^2 - x \leq 0$

B.  $\forall x \leq 0, x^2 - x \leq 0$

C.  $\exists x \leq 0, x^2 - x \leq 0$

D.  $\exists x > 0, x^2 - x \leq 0$

4. 已知向量  $a = (1, 3), b = (m, 4)$ , 且  $b \parallel (2a - b)$ , 则  $m$  的值为 ( )

A.  $\frac{4}{3}$

B. 2

C. 4

D. -2 或 4

5. 已知  $a = \frac{1}{\log_2 e}, b = \cos 2, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ , 则  $a, b, c$  的大小顺序为 ( )

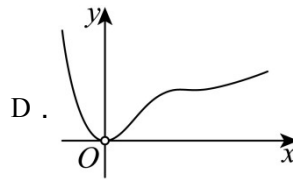
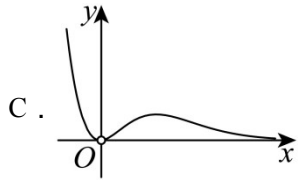
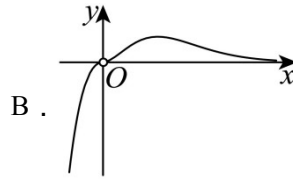
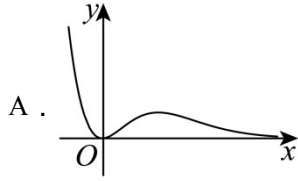
A.  $c > a > b$

B.  $a > c > b$

C.  $c > b > a$

D.  $b > a > c$

6. 函数  $f(x) = \frac{x^3}{3^x - 1}$  的图象大致为 ( )



7. 已知角  $\alpha$  是第一象限角,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$  ( )

A.  $\frac{3}{10}$

B.  $\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$

C.  $\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$

D.  $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$

8. 等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 + a_5 + a_8 = 9$ ,  $a_n = 33$ , 则  $n$  为 ( )

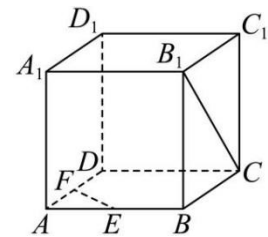
A. 48

B. 49

C. 50

D. 51

9. 如右图所示, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别是  $AB$ ,



$AD$  的中点, 则异面直线  $B_1C$  与  $EF$  所成的角的大小为 ( )

A.  $30^\circ$

B.  $45^\circ$

C.  $60^\circ$

D.  $90^\circ$

10. 为了得到函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  的图象, 只需要把函数  $y = \sin 2x$  的图象上所有点 ( )

A. 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度

B. 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度

C. 向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度

D. 向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度



抽取 18 人进行体质测试，则抽到的女运动员人数为\_\_\_\_\_。

18. 底面边长为 1，棱长为  $\sqrt{2}$  的正四棱柱，各顶点均为在同一球面上，则该球的体积为\_\_\_\_\_。

19. 已知角  $\alpha$  终边上一点  $P(1, -2)$ ，则  $\frac{2\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} =$  \_\_\_\_\_。

20. 已知直线  $ax + 2y + 3a = 0$  和  $3x + (a - 1)y + 7 - a = 0$  平行，则  $a =$  \_\_\_\_\_。

### 三、解答题

21. 已知公差为零的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ，且  $a_1, a_4, a_{13}$  成等比数列。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

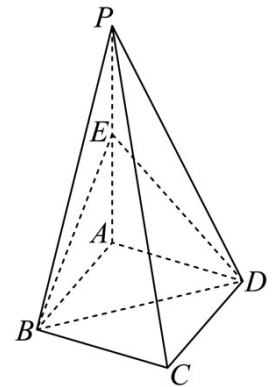
(2) 若  $S_n$  表示数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，求数列  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

22. 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且满足  $c^2 - ab = (a - b)^2$ 。

(1) 求角  $C$ ；

(2) 若  $A = 75^\circ$ ， $c = \sqrt{3}$ ，求  $b$ 。

23. 如图，四棱锥  $P - ABCD$  的底面是边长为 2 的正方形，侧棱  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $PA = 4$ ， $E$  为侧棱  $PA$  的中点。



(1) 求四棱锥  $P - ABCD$  的体积；

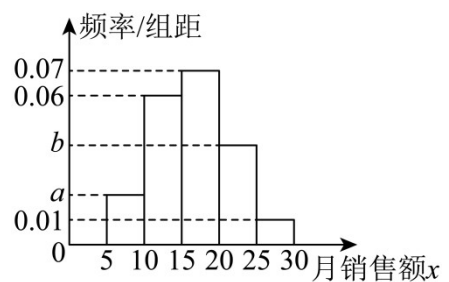
(2) 证明： $PC \parallel$  平面  $BDE$ ；

(3) 证明： $BD \perp PC$ 。

24. 某商场随机抽取了 100 名员工的月销售额  $x$  (单位：千

元)，将  $x$  的所有取值分成  $[5, 10)$ ， $[10, 15)$ ， $[15, 20)$ ，

$[20, 25)$ ， $[25, 30]$  五组，并绘制得到如图所示的频率分布直



方图，其中  $b = 2a$ 。

- (1)求  $a, b$  的值；
- (2)求这 100 名员工月销售额的第 70 百分位数；
- (3)若月销售额在  $[25, 30]$  这一组中男女职工人数为  $3:2$ ，现从中随机抽取 2 人，求所抽取的 2 人中至少有一名女职工的概率.

25. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  过点  $M(1, 2)$ .

- (1)求抛物线  $C$  的标准方程；
- (2)设抛物线  $C$  的焦点为  $F$ ，坐标原点为  $O$ . 过点  $F$  且倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$  的直线与抛物线  $C$  交于  $A, B$  两点，求  $\triangle ABO$  的面积.

26. 已知函数  $f(x) = ax - \ln x$ ， $a \in \mathbf{R}$ .

- (1)当  $a = 1$  时，求函数  $f(x)$  的单调区间；
- (2)若不等式  $f(x) \geq 0$  恒成立，求实数  $a$  的取值范围.