高中数学教师专业水平测试参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	C	C	A	C	B	B	D
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	B	A	B	D	C	A				

1．B

【解析】利用并集的定义可求得集合$A \cup B$.

【详解】由题意可知$A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，因此，$A \cup B=\{x|1<x<4\}$.

故选：B.

2．C

【分析】由复数乘法以及模的计算公式即可求解.

【详解】由题意$z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})=2+\mathrm{i}, \therefore |z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

故选：C.

3．C

【详解】要使函数有意义需满足$\begin{cases}3-x\geq 0\\ x+1>0\end{cases}$，解得$-1<x\leq 3$，则函数的定义域为$(-1,3]$，故选C.

点睛：本题主要考查了常见的函数的定义域的求法，属于基础题；常见的函数定义域求法有：1、偶次根式下大于等于0；2、分母不为0；3、对数的真数部分大于0；4、0的0次方无意义；5、正切函数$y=\tan x$中$\left\{x \middle| x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$；6、抽象函数的定义域；7、在实际应用中的定义域等.

4．C

【分析】先利用球的表面积公式求得半径的倍数，再利用体积公式求解即可.

【详解】设原来的球的半径为r，面积为S，体积为V，后来的球的半径为R，面积为S'，

体积为V'，

则$\frac{S'}{S}=\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=9$，故$R=3r$，

所以$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{(3r)^3}{r^3}=27$，即球的体积为原来的27倍.

故选：C.

5．C

【分析】由已知条件，根据平均数和方差的计算公式进行求解即可.

【详解】根据题意有$\bar{x}=\frac{4\times 7+4}{8}=4$，

而$s^2=\frac{7\times 2+(4-4)^2}{8}<2$.

故选：C.

6．A

【分析】先求出角α的终边经过点$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，进而求出$\tan\alpha$，然后利用倍角公式进行求解即可

【详解】因为角α的终边经过点$(\sin 60^\circ,\cos 120^\circ)$

即角α的终边过点$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

所以$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\sqrt{3}$.

故选:A

【点睛】本题考查倍角公式的使用，主要考查学生的运算能力，属于基础题

7．C

【分析】利用复数的坐标表示和除法运算即可.

【详解】由题可知$z=1-i$，则$\frac{3+i}{z}=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+2i$.

故选：C

8．B

【分析】利用举反例进行排除，以及利用不等式的性质进行判断.

【详解】对于A，当$c=0$时不成立，故A错误；

对于B，因为$a<b<0$，不等式两边同时乘以a，所以$a^2>ab$，

不等式两边同时乘以b，$ab>b^2$，所以$a^2>ab>b^2$，故B正确；

对于C，取$a=-1$，$b=1$时，$\frac{1}{a}=-1$，$\frac{1}{b}=1$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$不成立，故C错误；

对于D，若$a<b<0$，则$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$，所以$-\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0$，又$-a>-b>0$，

所以$\frac{a}{b}>\frac{b}{a}>0$，因此D不正确．

故选：B．

9．B

【分析】利用分层抽样的定义求解即可

【详解】解：由题意得，从这三个乡镇抽取300人服役，应从北乡抽取

$300\times\frac{8100}{8100+7488+6912}=300\times\frac{81}{225}=108$，

故选：B

10．D

【分析】由大边对大角知A最大，利用余弦定理求解即可.

【详解】因为a=4，b=3，c=2，

所以最大角是A，

根据余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+4-16}{2\times3\times2}=-\frac{1}{4}$，且$A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

故选：D

11．B

【分析】根据充分条件和必要条件的定义结合线面垂直的判定可得结论

【详解】当 $m\perp n$ ，$m\subset\alpha$ ，$\alpha//\beta$ 时，直线 m 与平面 β 平行，所以当 $m\perp n$ 时，$n\perp\beta$ 不成立，

当 $n\perp\beta$ 时，因为 $m\subset\alpha$ ，$\alpha//\beta$ ，所以 $n\perp\alpha$ ，$m\perp n$ ，

所以“$m\perp n$”是“$n\perp\beta$”的必要不充分条件，

故选：B

12．A

【分析】先求出 $f(x)$,可知其为定义域上的增函数,再根据零点存在性定理求出零点所在区间.

【详解】$f(x-2)=\ln x-\frac{2}{x}$,则 $f(x)=\ln(x+2)-\frac{2}{x+2}$,

根据单调性的性质可知 $f(x)=\ln(x+2)-\frac{2}{x+2}$ 是定义域上的增函数,

故 $f(x)$ 在定义域内最多有一个零点,

又 $f(0)=\ln 2-1<0, f(1)=\ln 3-\frac{2}{3}>0$,

所以存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $f\left(x_0\right)=0$,

故选:A.

【点睛】本题主要考查零点存在性定理的应用,结合了解析式、单调性等相关知识,难度不大.

13．B

【解析】由排列组合的思想,分别计算出总的选择方案数量以及同时选择历史和化学的方案数量,结合古典概型,即可求概率.

【详解】甲同学所有的选择方案共有$C_2^1C_4^2=12$种,甲同学同时选择历史和化学后

只需在生物、政治、地理三科中再选择一科即可,共有$C_3^1=3$种选择方案

根据古典概型的概率计算公式,可得甲同学同时选择历史和化学的概率$P=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

故选:B.

【点睛】本题考查了排列组合,考查了古典概型概率的求解.求概率类问题,最常见的有古典概型的概率、几何概型的概率.根据题目的情景,选择正确的模型进行求解.在求古典概型概率时,可将所有的基本事件列举出来进行求解,但是速度较慢,合理地结合排列组合的思想会提高做题速度.

14．D

【详解】因为$\left|a-2b\right|=2\sqrt{7}$,所以$a^2-4a\cdot b+4b^2=28\therefore a^2-4\left|a\right|\left|b\right|\cos 60^0+4b^2=28$

$4-4\times 2\times\left|\bar{b}\right|\times\frac{1}{2}+4\left|\bar{b}\right|^2=28\therefore\left|\bar{b}\right|^2-\left|\bar{b}\right|-6=0,\left|\bar{b}\right|=3$,选D.

15．C

【分析】由同角三角函数关系可得$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，进而直接利用两角和的余弦展开求解即可.

【详解】$\because\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha$是第二象限角，

$\therefore\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

$\therefore\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

故选：C.

16．A

【分析】由已知条件可得出$\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=1\end{cases}$，求出$a$、$b$的值，再利用函数$y=e^x$的单调性可解

不等式$0\le f(x)\le 1$.

【详解】因为 $f(x)=e^x-ax+b$，则 $f'(x)=e^x-a$，

由题意可得 $\begin{cases} f(0)=1+b=0 \\ f'(0)=1-a=1 \end{cases}$，解得 $a=0$，$b=-1$，$f(x)=e^x-1$，

由 $0\le f(x)\le 1$ 可得 $0\le e^x-1\le 1$，即 $1\le e^x\le 2$，解得 $0\le x\le \ln 2$.

故选：A.

17．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】根据诱导公式 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，求出 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，再利用同角的三角函数基本关系式求出 $\cos\alpha$ 即可.

【详解】因为 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

又因为 α 为锐角，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

18．$(0,2)$

【分析】根据函数图像平移法则即可求解

【详解】由 $y=\log_a x$ 根据平移法则向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，可得到

$y=\log_a(x+1)+2$，$y=\log_a x$经过$(1,0)$，则$y=\log_a(x+1)+2$经过$(0,2)$

故答案为：$(0,2)$

【点睛】本题考查对数函数过定点问题，属于基础题

19．5

【分析】利用正四棱柱的特征求出底面边长，再利用体对角线的公式即可计算结果.

【详解】解：正四棱柱的底面为正方形，设底面边长为a，侧棱长为b，则有$a^2=8$，所以

$a=2\sqrt{2}$，则四棱柱的体对角线为$\sqrt{a^2+a^2+b^2}=\sqrt{8+8+9}=5$.

故答案为：5.

【点睛】本题考查正四棱柱的体对角线长的计算，熟悉正四棱柱的图形特征是解题的关键，属于基础题.

20．1

【分析】根据原数据与新数据的数量关系，可求得新数据的平均数和方差即得.

【详解】依题意，因$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$的平均数为$\bar{x}=4$，方差为$s^2=2$，

则数据$2x_1+1$，$2x_2+1$，$2x_3+1$，…，$2x_n+1$的平均数为$\overline{X}=2\bar{x}+1=2\times4+1=9$，

方差为$S^2=4s^2=8$，

故两者的差为$\overline{X}-S^2=9-8=1$.

故答案为：1.

21．(1)0.56

(2)0.94

【分析】（1）利用独立事件的概率乘法公式进行求解；

（2）先求出甲、乙两人均未命中的概率，从而利用对立事件求概率公式得到答案.

【详解】（1）甲、乙两人都命中的概率为$0.7\times0.8=0.56$；

（2）甲、乙两人均未命中的概率为$(1-0.7)\times(1-0.8)=0.06$，

故甲、乙两人至少有一人命中的概率为$1-0.06=0.94$.

22．（1）增函数，见解析（2）$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

【分析】（1）利用函数单调性的定义，即可证得函数$f(x)$在$(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$上为单调递增函数；

（2）由（1）可得函数$f(x)$在区间$[2,6]$上为单调递增函数，即可求得函数的值域.

【详解】函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$上单调递增．

证明：任意取x_1,x_2，$x_1\neq x_2$且x_1,x_2均不为0，

对于函数$f(x)=2-\frac{3}{x}$，

有$f(x_1)-f(x_2)=2-\frac{3}{x_1}-\left(2-\frac{3}{x_2}\right)=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}=\frac{3(x_1-x_2)}{x_1\cdot x_2}$，

当$0<x_1<x_2$时，$x_1\cdot x_2>0$，$x_1-x_2<0$

∴$\frac{3(x_1-x_2)}{x_1\cdot x_2}<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

故函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增．

当$x_1<x_2<0$时，$x_1\cdot x_2>0$，$x_1-x_2<0$

∴$\frac{3(x_1-x_2)}{x_1\cdot x_2}<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

故函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递增．

所以函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$上单调递增．

（2）由（1）可得函数 $f(x)$ 在区间 $[2,6]$ 上单调递增，

故当 $x=2$ 时，$f(x)_{\min}=f(2)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，当 $x=6$ 时，$f(x)_{\max}=f(6)=2-\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$．

所以函数 $f(x)$ 在 $[2,6]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

【点睛】本题主要考查了利用定义法证明函数的单调性，以及函数的值域的求解，其中解答中熟记函数的单调性的定义，得到函数的单调性是解答本题的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

23．(1) π

(2)最大值为 $\sqrt{2}-1$，单调增区间为 $\left(-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right)$，$(k\in\mathbf{Z})$

【分析】（1）借助降幂公式与辅助角公式将 $f(x)$ 化为正弦型函数后即可得；

（2）运用正弦型函数的性质计算即可得.

【详解】（1）$f(x)=\sin 2x-2\sin^2 x=\sin 2x-(1-\cos 2x)$

$=\sin 2x+\cos 2x-1=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，

则 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（2）由 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$，故 $f(x)\in\left[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right]$，

即函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}-1$，

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$，

即 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi<x<\frac{\pi}{8}+k\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$，

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right)$，$(k\in\mathbf{Z})$.

24．(1)证明见解析

(2) $\sqrt{2}$

【分析】（1）利用正三角形性质和线面垂直性质得 $AM\perp BC$ ，$PM\perp BC$ ，最后再利用线面垂直的判定和性质即可证明；

（2）利用勾股定理求出 $PM=\sqrt{6}$ ，最后利用椎体体积公式即可.

【详解】（1）连接 AM ，因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，M 为 BC 的中点，

所以 $AM\perp BC$ ，因为 $PM\perp$ 底面 ABC ，$BC\subset$ 平面 ABC ，所以 $PM\perp BC$ ，

又 $AM\cap PM=M$ ，$AM,PM\subset$ 平面 APM ，

所以 $BC\perp$ 平面 PAM ，因为 $PA\subset$ 平面 PAM ，所以 $BC\perp PA$.

（2）因为底面 ABC 是正三角形，$AB=2,PA=3$ ，

则 $AM=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ，因为 $PM\perp$ 底面 ABC ，$AM\subset$ 底面 ABC ，所以 $PM\perp AM$ ，

所以 $PM=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}$ ，

所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PM=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2}$.

25．(1) $a=(4,2)$ 或 $a=(-4,-2)$ ；

(2) $\lambda=1$ 或 -1

【分析】（1）先设 $a=(x,y)$ ，根据题意有 $\begin{cases}x^2+y^2=20\\2y=x\end{cases}$ 求解；

（2）根据 $b=(2,1),c=(-2,1)$ ，得 $b+\lambda c=(2,1)+(2\lambda,\lambda)=(2+2\lambda,1+\lambda)$ ，

$\lambda b-c=(2\lambda,\lambda)-(2,1)=(2\lambda-2,\lambda-1)$ ，然后根据 $b+\lambda c$ 与 $\lambda b-c$ 互相垂直求解．

【详解】（1）设 $a=(x,y)$，依题意得 $\begin{cases}x^2+y^2=20\\2y=x\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$，

即 $a=(4,2)$ 或 $a=(-4,-2)$．

（2）因为 $b+\lambda c=(2,1)+(2\lambda,\lambda)=(2+2\lambda,1+\lambda)$，

$\lambda b-c=(2\lambda,\lambda)-(2,1)=(2\lambda-2,\lambda-1)$，

因为 $b+\lambda c$ 与 $\lambda b-c$ 互相垂直，

所以 $(b+\lambda c)\cdot(\lambda b-c)=0$，

即 $(2+2\lambda)(2\lambda-2)+(\lambda+1)(\lambda-1)=0$，

解得 $\lambda=1$ 或 -1．

26．(1) $f(x)=x^2-6x$

(2) $(2,3]$

(3) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right]$

【分析】（1）根据不等式的解集与方程之间的关系可知，2、4 是一元二次方程 $x^2+bx+c+8=0$ 的两个实数根，利用韦达定理求出 b、c 的值，即可得出函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）解不等式组 $\begin{cases}f(x)>0\\f(x-k)<0\end{cases}$，分析可知，该不等式的整数解为 7、8，可得出关于实数 k 的不等式，解之即可；

（3）由题意可知，对任意$x\in\left[-2,2\right]$，不等式$tx^2-6tx-2\le0$很成立，分$t=0$、$t>0$、$t<0$三种情况讨论，在第一种情况下，直接验证即可；在后面两种情况下，结合二次函数基本性质可得出关于实数t的不等式，综合可得出实数t的取值范围.

【详解】（1）解：因为$f\left(x\right)=x^2+bx+c$，不等式$f\left(x\right)<-8$的解集是$\left(2,4\right)$，

所以2、4是一元二次方程$x^2+bx+c+8=0$的两个实数根，

由韦达定理可得$\begin{cases}2+4=-b\\2\times4=c+8\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-6\\c=0\end{cases}$，所以$f\left(x\right)=x^2-6x$.

（2）解：不等式组$\begin{cases}f\left(x\right)>0\\f\left(x-k\right)<0\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2-6x>0\\\left(x-k\right)^2-6\left(x-k\right)<0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x\langle 0\text{或}x\rangle 6\\k<x<k+6\end{cases}$，

因为原不等式组的正整数解仅有2个，可得该正整数解为7、8，

可得到$8<k+6\le9$，解得$2<k\le3$，则实数k取值范围是$\left(2,3\right]$.

（3）解：因为对任意$x\in\left[-2,2\right]$，不等式$t\cdot f\left(x\right)\le2$恒成立，所以$tx^2-6tx-2\le0$，

当$t=0$时，$-2\le0$恒成立；

当$t\ne0$时，二次函数$y=tx^2-6tx-2$的对称轴方程为$t=3$，

当$t>0$时，函数$y=tx^2-6tx-2$在$\left[-2,2\right]$上单调递减，

所以只需满足$t\cdot(-2)^2-6t\cdot(-2)-2=16t-2\le0$，解得$0<t\le\frac{1}{8}$；

当$t<0$时，函数$y=tx^2-6tx-2$在$\left[-2,2\right]$上单调递增，

所以只需满足$t\cdot2^2-6t\cdot2-2=-8t-2\le0$，解得$-\frac{1}{4}\le t<0$.

综上，t的取值范围是$\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right]$.