

《初中数学》参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
答案	D	D	C	B	D	D	C	C	C	

1. D

【分析】根据算术平方根的意义可判断选项 A，根据负整数指数幂的性质可判断选项 B，根据同类项的定义可判断选项 C，根据幂的乘方的性质可判断选项 D。

【详解】A、 $\sqrt{4} = 2 \neq \pm 2$ ，此选项错误，故此选项不符合题意；

B、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \neq -2$ ，此选项错误，故此选项不符合题意；

C、 $a + 2a^2$ 不能合并，此选项错误，故此选项不符合题意；

D、 $(-a^4)^3 = -a^{12}$ ，此选项正确，故此选项符合题意；

故选 D。

【点睛】本题主要考查了算术平方根，负整数指数幂，合并同类项，幂的乘方，解题的关键是熟练掌握相关的运算法则和性质。

2. D

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解。

【详解】A、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项不合题意；

B、不是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

D、是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项符合题意；

故选：D。

【点睛】本题考查了轴对称图形、中心对称图形，能根据概念判断一个图形是否为轴对称图形或中心对称图形是解答的关键。

3. C

【分析】本题考查平行线的判定和性质，先证明 $a \parallel b$ ，进而得到 $\angle 3 = \angle 5$ ，邻补角求出 $\angle 4$ 的度数即可。

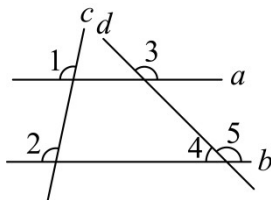
【详解】解： $\because \angle 1 = \angle 2$ ，

$$\therefore a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 5 = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 + \angle 4 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = 45^\circ;$$

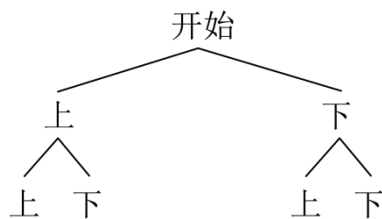


故选 C .

4 . B

【分析】根据题意可以通过树状图写出所有的可能性，从而可以得到两个都是正面向上的概率 .

【详解】解：由题意可得，



\therefore 总可能发生的情况有 4 种，两个都朝上是 1 种，故两个都是正面向上的概率为： $\frac{1}{4}$ ，

故选：B；

【点睛】本题主要考查了列表法与树状图法，解题的关键是明确题意，可以写出所有的可能性 .

5 . D

【分析】利用同底数幂的乘法的法则，合并同类项的法则，同底数幂的除法的法则，幂的乘方的法则对各项进行运算即可 .

【详解】解：A、 x 与 $2x^2$ 不属于同类项，不能合并，故 A 不符合题意；

B、 $x \cdot x = x^2$ ，故 B 不符合题意；

C、 $(x^3)^3 = x^9$ ，故 C 不符合题意；

D、 $x^4 \div x^3 = x$ ，故 D 符合题意；

故选：D．

【点睛】本题主要考查合并同类项，幂的乘方，同底数幂的乘法，同底数幂的除法和乘法，解答的关键是对相应的运算法则的熟练掌握．

6．D

【分析】此题主要考查了反比例函数的性质、二次函数的性质，正确掌握相关函数增减性是解题关键．直接利用反比例函数的性质、二次函数的性质分别判断得出答案．

【详解】解：A、 $y = -\frac{1}{x}$ ，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，不合题意；

B、 $y = -(x+1)^2 + 1$ ，开口方向向下，对称轴为直线 $x = -1$ ，所以当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而减小，不合题意；

C、 $y = -x^2 - 1$ ，开口方向向下，对称轴为直线 $x = 0$ ，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，不合题意；

D、 $y = \frac{3}{x}$ ，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，符合题意；

故选：D．

7．C

【分析】本题主要考查一元二次方程的实际应用，熟练掌握解一元二次方程是解题的关键．根据题意列出方程即可得到答案．

【详解】解：设全市充电桩数量的年平均增长率为 x ，

根据题意得 $3.5(1+x)^2 = 5.04$ ，

解得 $x_1 = 0.2, x_2 = -2.2$ （舍去），

故全市充电桩数量的年平均增长率为 20%．

故选 C．

8. C

【分析】 本题考查了数轴与实数，由数轴可得 $b < 1 < a$ ， $|a| > |b|$ ，据此逐项判断即可求解，

掌握实数的运算法则是解题的关键。

【详解】 解：由数轴可得， $b < 1 < a$ ， $|a| > |b|$ ，

$$\therefore a + b > 0, a - b > 0,$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) > 0,$$

$$\therefore b < 1,$$

$\therefore b$ 可能是正数，也可能是负数，

$\therefore a^b$ 不一定是正数，

\therefore 计算结果一定是正数的有 3 个，

故选：C。

9. C

【详解】 结合两个图像可知，当点 P 在弧 CD 上运动时， $\angle APB$ 的度数不变，即 M 点

对应 D 点，此时点 P 的运动路程为 OC + 弧 CD，弧 CD 的长 = $\frac{90\pi \times 1}{180} = \frac{\pi}{2}$ ，所以点 P 的运动

路程为 $\frac{\pi}{2} + 1$ ，时间为 $\frac{\pi}{2} + 1$ 秒，故点 M 的横坐标应为 $\frac{\pi}{2} + 1$ 。故选 C

10. >

【分析】 先把 $\sqrt[4]{50}$ 整理成 $\sqrt[4]{125000}$ ，把 $\sqrt[3]{100}$ 整理成 $\sqrt[4]{10000}$ ，再根据实数大小比较的方法比较即可求解。

【详解】 解： $\because \sqrt{50} = \sqrt[4]{50^2} = \sqrt[4]{125000}$ ， $\sqrt[3]{100} = \sqrt[4]{100^2} = \sqrt[4]{10000}$ ，

且 $125000 > 10000$ ，

$$\therefore \sqrt{50} > \sqrt[3]{100},$$

故答案为： $>$.

【点睛】本题主要考查了实数的大小比较，解答此题的关键对 $\sqrt{50}$ 和 $\sqrt[3]{100}$ 进行整理 .

11 . 3.05×10^8

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数 . 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同 . 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数 .

【详解】解： $305\ 000\ 000 = 3.05 \times 10^8$

故答案为： 3.05×10^8

【点睛】此题考查了科学记数法的表示方法 . 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值 .

12 . 173.5 .

【分析】根据加权平均数的定义求解可得 .

【详解】解： $(172 \times 3 + 173 \times 2 + 174 \times 2 + 175 \times 3) \div (3 + 2 + 2 + 3)$
 $= (516 + 346 + 348 + 525) \div 10$
 $= 1735 \div 10$
 $= 173.5$ (cm)

答：该篮球队队员平均身高是 173.5cm .

故答案为：173.5 .

【点睛】本题主要考查加权平均数，熟练掌握加权平均数的定义是解题的关键 .

13 . $0 < a \leq 8$

【分析】本题考查三角形三边关系、等腰三角形的性质、根的判别式、根与系数的关系，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键 . 用公式法解一元二次方程，结合二次

根式有意义的条件及三角形边长为正的性质，可解得 $0 < a \leq 9$ 进而分两种情况讨论：当

$x_1 = x_2$ 时，或当 $x_1 \neq x_2$ 时，根据一元二次方程根的判别式、根与系数的关系、等腰三角形的性质解题即可 .

【详解】解：设 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 为方程 $x^2 - 6x + a = 0$ 的两个根，则

$$D = (-6)^2 - 4a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq 9,$$

$$\wedge x_1 = 3 - \sqrt{9 - a}, x_2 = 3 + \sqrt{9 - a}$$

$$\because x_1 > 0, x_2 > 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 9,$$

(1) 当 $x_1 = x_2$ 时，

$$\text{即 } D = 36 - 4a = 0$$

$\therefore a = 9$ 时，可以画无数个等腰三角形；

(2) 当 $x_1 \neq x_2$ 时，

$$\because x_1 \leq x_2$$

\therefore 以 x_2 为腰的等腰三角形必有一个，

又因为等腰三角形只有一个，故不存在以 x_2 为底， x_1 为腰的三角形，

$$\therefore 2x_1 \leq x_2$$

$$\therefore 6 - 2\sqrt{9 - a} \leq 3 + \sqrt{9 - a} \leq 3 + \sqrt{9 - a} + \sqrt{9 - a} \geq 1$$

$$\wedge 0 < a \leq 8$$

综上所述：当 $0 < a \leq 8$ 时只有一个等腰三角形，

故答案为： $0 < a \leq 8$ 。

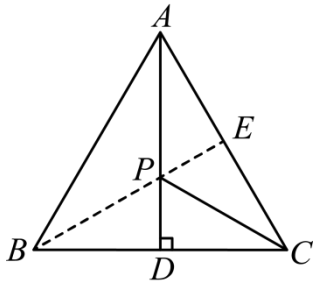
14. $30^\circ / 30$ 度

【分析】本题考查的是最短线路问题及等边三角形的性质，正确作出辅助线是解题关键。

连接 BE ，则 BE 的长度即为 PE 与 PC 和的最小值，再利用等边三角形的性质可得

$\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$ ，即可解决问题。

【详解】解：如图，连接 BE ，与 AD 交于点 P ，



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， AD 是 BC 边上的高，

$\therefore AP \perp BC$ ， $BD = CD$ ，即 AD 垂直平分 BC ，

$\therefore PB = PC$ ，

$\therefore PE + PC = PB + PE \geq BE$ ，

\therefore 此时 $PE + PC$ 最小，即 BE 就是 $PE + PC$ 的最小值，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BCE = 60^\circ$ ，

$\because BA = BC$ ， $AE = EC$ ，

$\therefore BE \perp AC$ ，

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EBC = 30^\circ$ ，

$\square PB = PC$ ，

$\therefore \angle PCB = \angle PBC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ACP = 30^\circ$ ，

故答案为： 30° 。

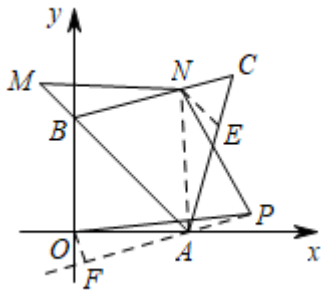
15. 75° / 75 度

【分析】如图，先添加辅助线，运用已知条件证明 $\triangle NBM \cong \triangle AEN$ (SAS)，得，

$NM = AN = NP$ ；然后再求得 $\angle OAP = 45^\circ + 120^\circ = 165^\circ$ ，由此知点 P 在直线 PA 上，根据垂

线段最短可知 OP 最小时的 $\angle AOP$ 的角度。

【详解】解：过点 N 作 $NE \parallel AB$ 交 AC 于点 E ，连接 AN 、 PA ，过点 O 作 $OF \perp PA$ 交 PA 的延长线于点 F 。



$$\because OA=OB, \angle AOB=90^\circ$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $NE \parallel AB$ ，

\therefore 易知 $\triangle CNE$ 是等边三角形，

$$\therefore CN = CE = NE,$$

$$\square BM = CN, CB = CA,$$

$$\therefore NE = BM, BN = AE,$$

$$\square \angle CBA = \angle CEN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MBN = \angle NEA = 120^\circ,$$

$$\therefore \triangle NBM \cong \triangle AEN (\text{SAS}),$$

$$\therefore NM = AN$$

$$\square NM = NP, NA = NP,$$

$$\therefore \angle NAP = \angle NPA, \angle NAM = \angle NMA,$$

$$\therefore 2\angle NAM + 2\angle NAP + \angle MNP = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle NAM + 2\angle NAP = 240^\circ,$$

$$\therefore \angle MAP = \angle NAM + \angle NAP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle OAP = 45^\circ + 120^\circ = 165^\circ,$$

$$\therefore \angle OAF = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ,$$

\therefore 点 P 在直线 PA 上运动 ($\angle OAP = 165^\circ$)，

根据垂线段最短可知，当点 P 与点 F 重合时， OP 的值最小，此时

$$\angle AOP = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ .$$

故答案为： 75° .

【点睛】此题是几何旋转变换的综合题，考查了全等三角形的判定与性质，点到直线的垂线段最短等知识，如何添加辅助线构造全等三角形是解此题的难点 .

16 . 0

【分析】先化简绝对值，根据零指数幂定义、负整数指数幂定义求值，代入 30 度角的正切值，再计算加减法 .

$$\text{【详解】 } |\sqrt{3} - 2| + (\pi - 2021)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3 \tan 30$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 1 - 3 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 0$$

【点睛】此题考查实数的混合运算，掌握绝对值的化简，零指数幂定义、负整数指数幂定义，30 度角的正切值是解题的关键 .

17 . (1) $x = -5$

(2)无解

【分析】(1) 去分母，将分式方程化为整式方程，移项、合并同类项、系数化 1 求出解，再进行检验即可；

(2) 去分母，将分式方程化为整式方程，去括号、移项、合并同类项、系数化 1 求出解，再进行检验即可 .

$$\text{【详解】 (1) 解： } \frac{5}{x} = \frac{7}{x-2} ,$$

$$\text{去分母得： } 5x - 10 = 7x ,$$

$$\text{移项、合并同类项得： } 2x = -10 ,$$

$$\text{解得： } x = -5 ,$$

经检验， $x = -5$ 是分式方程的解；

$$(2) \text{ 解： } \frac{2-x}{x-3} = \frac{1}{3-x} - 2 ,$$

去分母得： $2-x=-1-2(x-3)$ ，

移项、合并同类项得： $-x=-3$ ，

解得： $x=3$ ，

经检验， $x=3$ 使得 $x-3=0$ ，

$\therefore x=3$ 是分式方程的增根，

\therefore 原分式方程无解.

【点睛】 本题考查解分式方程，掌握解分式方程的一般步骤是解题的关键，注意求出解后要代入检验.

18. (1)100

(2)见解析

(3)21.6

(4)2018年该城市有219天不适宜开展户外活动.

【分析】 (1) 根据3级的天数和所占的百分比，即可求出抽查的总天数；

(2) 由(1)总天数，用总天数减去其它的天数即可求出5级的天数，从而补全统计图；

(3) 用 360° 乘以1级空气质量所占的百分比求出1级空气质量所对应的圆心角的度数；

(4) 用一年的天数乘以中度污染或者以上所占的百分比，求出2018年该城市不适宜开展户外活动的天数.

【详解】 (1) 解：根据题意得：

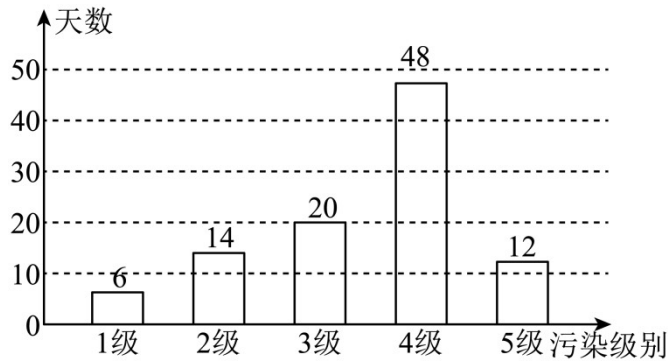
$$20 \div 20\% = 100 \text{ (天)} ,$$

故答案为：100；

(2) 解：由(1)知本次调查共抽取了100天的空气质量检测结果进行统计，

所以5级的天数是： $100 - 6 - 14 - 20 - 48 = 12$ (天)；

补图如下：



(3) 解：扇形统计图中 1 级空气质量所对应的圆心角为： $360^\circ \times \frac{6}{100} = 21.6^\circ$ ，

故答案为：21.6；

(4) 解：根据题意得： $365 \times \frac{48+12}{100} = 219$ （天），

答：2018 年该城市有 219 天不适宜开展户外活动。

【点睛】此题考查了条形图与扇形图的知识，准确读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。

19. 教学楼 AB 的高度为 $(5\sqrt{3}+16)m$

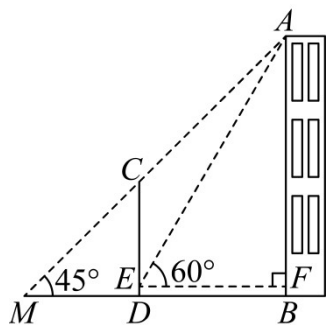
【分析】

本题考查解直角三角形-仰角俯角问题、锐角三角函数等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，学会构建方程解决问题，属于中考常考题型。

如图，过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 F ，根据等腰直角三角形的性质得到 $AB = BM$ ，同理 $CD = DM = 11m$ ，设 $BD = EF = xm$ ，根据三角函数的定义即可得到结论。

【详解】

解：如解图，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，易得四边形 $DBFE$ 为矩形，



$\therefore BF = DE = 11m$ ， $BD = EF$ ，

$$\because \angle AMB = 45^\circ, \angle ABM = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = BM,$$

同理可得 $CD = DM = 11\text{m}$,

设 $BD = EF = x\text{m}$,

$$\therefore AB = BM = (11 + x)\text{m},$$

$$\therefore AF = AB - BF = (10 + x)\text{m},$$

$$\because \tan \angle AEF = \frac{AF}{EF},$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{10 + x}{x},$$

$$\therefore x = 5 + 5\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = (5\sqrt{3} + 16)\text{m}.$$

答：教学楼 AB 的高度为 $(5\sqrt{3} + 16)\text{m}$ 。

20. (1) 该家电城试销购进 A 型水冷扇 6 台, B 型水冷扇 4 台

(2) 该家电城购进 10 台 A 型水冷扇, 20 台 B 型水冷扇时可获得最大利润

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用, 一次函数的应用, 正确理解题中的数量关系是解答本题的关键。

(1) 设该家电城试销购进 A 型水冷扇 x 台, B 型水冷扇 y 台, 根据“购买 A 型水冷扇 x 台和 B 型水冷扇 y 台共需费用 3200 元”以及“全部售完后共获得利润 440 元”, 列出方程组并求解即可;

(2) 设该家电城再次购进 m 台 A 型水冷扇, 列不等式并求解得 $m \geq 10$, 然后列出再次购进 A 、 B 两种型号水冷扇全部售出后获得的总利润与 m 的一次函数关系式, 最后根据一次函数的增减性求解即可。

【详解】 (1) 设该家电城试销购进 A 型水冷扇 x 台, B 型水冷扇 y 台,

$$\text{根据题意得: } \begin{cases} 300x + 350y = 3200 \\ (340 - 300)x + (400 - 350)y = 440 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$,

答：该家电城试销购进 A 型水冷扇 6 台， B 型水冷扇 4 台；

(2) 设该家电城再次购进 m 台 A 型水冷扇，则购进 $(30 - m)$ 台 B 型水冷扇，

根据题意得 $30 - m \leq 2m$,

解得 $m \geq 10$,

设该家电城再次购进 A 、 B 两种型号水冷扇全部售出后获得的总利润为 w 元，则

$$w = (340 - 300)m + (400 - 350)(30 - m)$$

$$\therefore w = -10m + 1500$$

$$\therefore -10 < 0$$

$\therefore w$ 随 m 的增大而减小，

$$\therefore \text{当 } m=10 \text{ 时，} w \text{ 取得最大值，此时 } 30 - m = 30 - 10 = 20$$

答：该家电城购进 10 台 A 型水冷扇，20 台 B 型水冷扇时可获得最大利润。

21 . (1)2.4

(2) t 为 2.5 时，四边形 $PBCF$ 为平行四边形

(3) $t = 1.8$

【分析】 (1) 根据勾股定理，可得 AB 的长，根据面积的不同表示方法，可得答案；

(2) 根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形，可得答案；

(3) 根据已知条件判定 $\triangle CDF \cong \triangle DP(AAS)$ ，即可得出 $AP = CF$ ，进而得到四边形 $APCF$ 为

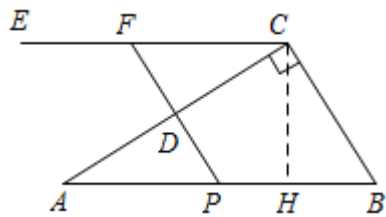
平行四边形，依据 $AC = PF$ ，即可得到四边形 $APCF$ 为矩形。再根据勾股定理即可得到 PB

的长，进而得出 t 。

【详解】 (1) 解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

如图，过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，则由 $\frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AC \cdot BC$ ，



得 $CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{4 \times 3}{5} = 2.4$.

$QCE \parallel AB$,

$\therefore AB$ 与 CE 之间的距离为 2.4 .

(2) $QCE \parallel AB$,

\therefore 当 $PF \parallel BC$ 时，四边形 $PBCF$ 是平行四边形 .

$\because D$ 为 AC 的中点，

$\therefore P$ 为 AB 的中点 .

$AP = PB = \frac{1}{2} AB = 2.5$.

(3) $QCE \parallel AB$,

$\therefore \angle DCF = \angle DAP$, $\angle DFC = \angle DPA$.

$\because D$ 为 AC 的中点，

$\therefore CD = AD$,

$\therefore \triangle CDF \cong \triangle ADP$ (AAS)

$\therefore AP = CF$,

\therefore 四边形 $APCF$ 为平行四边形 .

$\because AC = 4$, $PF = 4$.

$\therefore AC = PF$.

\therefore 四边形 $APCF$ 为矩形 .

$$\therefore CP \perp AB,$$

在 $Rt\triangle CPB$ 中, $CP = 2.4$, $BC = 3$,

$$\therefore PB = \sqrt{BC^2 - CP^2} = \sqrt{3^2 - 2.4^2} = 1.8.$$

$$\therefore t = 1.8.$$

【点睛】此题考查了平行四边形的判定与性质、矩形的判定与性质以及勾股定理的运用，熟练掌握平行四边形的判定与性质是解本题的关键。

22. (1)2

$$(2) 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

(3)见解析

【分析】(1) 先证明 AO 垂直平分 BC ，三线合一得到 $\angle BAO = 30^\circ$ ，进而求出 OB 的长即可；

(2) 分割法求出阴影部分的面积即可；

(3) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle BOD$ ，得到 $BD^2 = AD \cdot OD$ ，三线合一，得到 $BC = 2BD$ ，即可得出结论。

【详解】(1) 解： $\because AB, AC$ 与 $\odot O$ 相切于点 B 和点 C ，

$$\therefore AB = AC, \angle ABO = \angle ACO = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore AO \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2} OA,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3}OB = 2\sqrt{3},$$

$\therefore OB=2$, 即 $\odot O$ 的半径为 2 ;

故答案为 : 2

(2) 由 (1) 知 : $OB=2, OA=2OB=4, \angle AOB=90^\circ - \angle BAO=60^\circ$,

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形}BOE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{60\pi}{360} \times 2^2 = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} ;$$

(3) $\because AO \perp BC$, $OB=OC$,

$\therefore \angle BDO = \angle ADB = 90^\circ = \angle ABO$, $BC=2BD$,

$\therefore \angle OBD = \angle BAD = 90^\circ - \angle ABD$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BOD$,

$$\therefore \frac{BD}{OD} = \frac{AD}{BD} ,$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot OD ,$$

$\because BC=2BD$,

$$\therefore BC^2 = 4BD^2 = 4AD \cdot OD .$$

【点睛】 本题考查切线的性质，切线长定理，相似三角形的判定和性质，含 30 度角的直角三角形的性质，熟练掌握切线的性质，是解题的关键 .

23 . (1) $y = x^2 - 2x - 3$, $(1, -4)$

(2) $\frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{4}$

【分析】 (1) 把 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点坐标代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$, 利用待定系数法即可解决问题 ;

(2) 如图中，连接 DB 、 DC . 设 $D(m, m^2 - 2m - 3)$, 由题意 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形， DE 最大时， $\triangle DEF$ 的周长最大，此时 $\triangle DBC$ 的面积最大，则有 $S_{\triangle DBC} = S_{\triangle DOB} + S_{\triangle DOC}$

$$- S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-m^2 + 2m + 3) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2} \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} , \text{ 可得 } m = \frac{3}{2} \text{ 时 ,}$$

$\triangle DBC$ 的面积最大，此时 $\triangle DEF$ 的面积也最大，可求出 DE 的长，即可解决问题 .

【详解】 (1) 解：把 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点坐标代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$,

$$\text{得到} \begin{cases} a - b - 3 = 0 \\ 9a + 3b - 3 = 0 \end{cases},$$

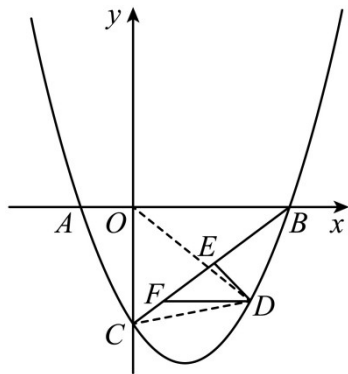
$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 ,$$

\therefore 顶点 M 的坐标为 $(1, -4)$;

(2) 如图, 连接 DB 、 DC , OD ,



令 $x=0$, $y=-3$,

$$\text{解得: } x_1 = -1, x_2 = 3 ,$$

$\therefore C(0, -3)$,

$\therefore B(3, 0)$

$\therefore OB = OC = 3$,

$\therefore \angle OBC = 45^\circ$,

$\therefore DF \parallel OB$,

$\therefore \angle DFE = \angle OBC = 45^\circ$,

$\therefore DE \perp BC$,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形 ,

$$\therefore DF = \sqrt{2}DE, EF = DE ,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 周长为 } DE + DF + EF = (2 + \sqrt{2})DE ,$$

$\therefore DE$ 最大时, $\triangle DEF$ 的周长最大, 此时 $\triangle DBC$ 的面积最大,

设 $D(m, m^2 - 2m - 3)$,

$$\therefore S_{\triangle DBC} = S_{\triangle DOB} + S_{\triangle DOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-m^2 + 2m + 3) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = -\frac{3}{2}(m$$

$$- \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{8} ,$$

$\therefore m = \frac{3}{2}$ 时, $\triangle DBC$ 的面积最大, 此时 $\triangle DEF$ 的周长也最大,

此时 $D(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$,

$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 3\sqrt{2} ,$$

$$\therefore \text{此时 } \frac{1}{2} DE \cdot BC = \frac{1}{2} DE \cdot 3\sqrt{2} = \frac{27}{8} ,$$

解得: $DE = \frac{9\sqrt{2}}{8}$,

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的周长最大的最大值为 } (2 + \sqrt{2})DE = (2 + \sqrt{2}) \times \frac{9\sqrt{2}}{8} = \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{4}$$

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象和性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 熟练掌握待定系数法, 抛物线的性质是解题的关键.