初中数学教师专业能力考核试题参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	D	D	C	A	A	B	B	A

4．D

【分析】将每个字母表示的数都平方，然后与 $\sqrt{7}$ 的平方进行大小比较即可得到答案.

【详解】解：$\left(\sqrt{7}\right)^2=7$，

$1.5^2=2.25$，$2^2=4$，$2.5^2=6.25$，$3^2=9$，

∵$6.25<7<9$，

∴在数轴上表示 $\sqrt{7}$ 的点在 C 与 D 之间.

故选 D.

【点睛】题目主要考查实数的大小比较及无理数的估算，熟练掌握无理数的估算方法是解题关键.

5．C

【分析】直接利用同底数幂的乘除运算法则以及幂的乘方运算法则、合并同类项法则分别计算出结果即可.

【详解】A. $a^2\bullet a^3=a^5$，故此选项错误；

B. $a^8\div a^2=a^6$，故此选项错误；

C. $(a^2)^3=a^6$，计算正确；

D. $(-2ab)^3=-8a^3b^3$，故此选项错误.

故选 C.

【点睛】此题主要考查了直接利用同底数幂的乘除运算法则以及幂的乘方运算法则、合并同类项法则进行计算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

6．A

【分析】如图∠3 的顶点用 F 表示，∠2 的顶点用 E 表示，根据 $AB\parallel CD$，得出∠1=∠A=30°，根据领补角互补得出∠AFE=180°-∠3=180°-150°=30°，根据三角形外角性质求解即可．

【详解】解：如图$\angle 3$的顶点用F表示，$\angle 2$的顶点用E表示，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle 1=\angle A=30^\circ$，

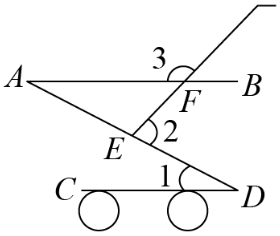
$\because \angle 3+\angle AFE=180^\circ$，

$\therefore \angle AFE=180^\circ-\angle 3=180^\circ-150^\circ=30^\circ$，

$\because \angle 2$是$\triangle AEF$的外角，

$\therefore \angle 2=\angle A+\angle AFE=30^\circ+30^\circ=60^\circ$．

故选择A．

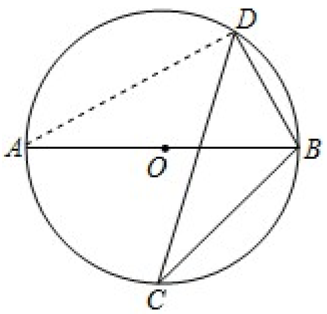


【点睛】本题考查平行线性质，领补角互补性质，三角形外角性质，掌握平行线性质，领补角互补性质，三角形外角性质是解题关键．

7．A

【分析】连接AD，根据圆周角定理得出$\angle BCD=\angle A$，$\angle ADB=90^\circ$，再求出答案即可．

【详解】解：连接AD，



$\because AB$是⊙O的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

$\because \angle BCD=\angle A$，

$\therefore \angle A=44^\circ$，

$\therefore \angle ABD=90^\circ-\angle A=46^\circ$，

故选：A．

【点睛】本题考查了直角三角形的性质和圆周角定理，注意：①在同圆或等圆中，同弧或等弧所对

的圆周角相等，②直径所对的圆周角是直角．

8．B

【分析】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，先求出2月房价为$(1-8\%)a$万元，设3，4两个月房价的月平均增长率为x，根据题意即可得出关于x的一元二次方程，此题得解．

【详解】解：∵今年1月房价为每平方米a万元，2月房价比1月下降了8%，

∴2月份的房价为$(1-8\%)a$万元，

设3，4两个月房价的月平均增长率为x，依题意，得：

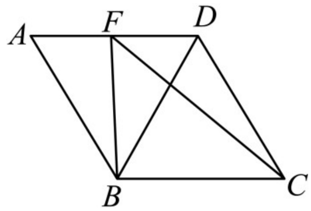
$a(1-8\%)(1+x)^2=b$，

故选：B．

9．B

【分析】本题考查了动点问题的函数图象，解直角三角形，菱形的性质；当点F在AD上时，$\triangle FBC$的面积不变，即y值不变；当点F在AD上时，作$FH\perp BC$于H，证明$\triangle ABD$为等边三角形，表示出FH，求出$\triangle FBC$的面积，根据两段函数图象特点判断解答即可．

【详解】解：当点F在AD上时，如图，



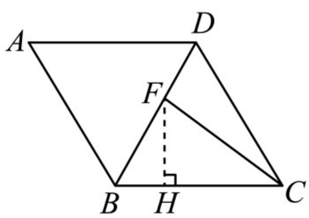
∵四边形$ABCD$为菱形，

∴$AD\parallel BC$，

∴AD与BC之间距离不变，

∴$\triangle FBC$的面积不变，即y值不变；

当点F在AD上时，如图，



作$FH\perp BC$于H，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴$AD=AB$，

∵$AD=BD$，

∴$AD=BD=AB$，

∴$\triangle ABD$ 为等边三角形，

∴$\angle ABD=60^{\circ}$，

∴$\angle DBC=60^{\circ}$，

∵菱形边长为 3cm，

∴$BF=(6-x)\text{cm}$，

∴$FH=(6-x)\cdot\sin60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}(6-x)}{2}\text{ cm}$

∴$y=\dfrac{1}{2}BC\cdot HF=\dfrac{1}{2}\times3\cdot\dfrac{\sqrt{3}(6-x)}{2}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}x$

根据两段函数图象特点判断B符合题意．

故选：B．

10．A

【分析】本题主要考查了一次函数与反比例函数的交点问题，先利用待定系数法分别求出一次函数与反比例函数的解析式，再求出点 D 的坐标，结合图形一一判断即可得出答案．

【详解】解：①直线 $y=-x+b$ 与反比例函数 $y=\dfrac{2k}{x}(k\neq0)$ 的图象的一支交于点 $C(1,4)$，

则 $4=-1+b$，$2k=4$，解得：$b=5$，$k=2$，故①正确；

②∵A，B 分别是直线 $y=-x+5$ 与 x 轴和 y 轴的交点，

∴点 A 的坐标为 $(5,0)$，点 B 的坐标为 $(0,5)$，

∴$OA=OB=5$．

∵$\angle AOB=90^{\circ}$，

∴$\angle DAF=45^{\circ}$

∵$DF\perp x$ 轴，

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰直角三角形，故②正确；

③ 令 $-x+5=\frac{4}{x}$，解得 $x=1$，或 $x=4$

将 $x=4$ 代入 $y=-x+5$ 得 $y=1$，

$\therefore$点 D 的坐标为 $(4,1)$，

$\therefore DF=1$，

$\because$点 C 到 y 轴的距离为 1，

$\therefore AOD$ 和 BOC 等底等高，

$\therefore S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$，

又 $S_{\triangle AEC}=S_{\triangle AOB}-S_{四边形OBCE}$，$S_{\triangle BOD}=S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AOD}$，$S_{四边形OBCE}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COE}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle COE}$，

$\therefore S_{\triangle AEC}\neq S_{\triangle BOD}$，故③错误；

④ $S_{\triangle COD}=S_{\triangle AOB}-2S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times5\times5-2\times\frac{1}{2}\times5\times1=\frac{15}{2}$，故④错误．

故选：A

二、填空题。（共 7 小题，第 11、12 题每空 1 分，其余每小题 3 分，共 20 分）

11. 数学的思维思考， 数学的语言表达 12. 图形与几何 统计与概率 综合与实践

13. $x\geq0$ 且 $x\neq2$ 14. $\frac{\sqrt{11}}{11}$ 15. $\frac{1}{3}$ 16. $\sqrt{3}$ 17.（4,1）

13. $x\geq0$ 且 $x\neq2$

【分析】根据二次根式中被开方数大于等于 0 及分母不为 0 即可求解．

【详解】解：由题意可知：$\begin{cases}x\geq0\\x-2\neq0\end{cases}$，解得：$x\geq0$ 且 $x\neq2$，

故答案为：$x\geq0$ 且 $x\neq2$ ．

【点睛】本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分母不

为 0 是解题的关键．

14．$\frac{\sqrt{11}}{11}$

【分析】由直径所对的原周角是 90 度得出 $\angle ABD=90^{\circ}$，同弧所对的圆周角相等可得出

$\sin\angle C=\sin\angle D=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，进而可求出 AB，再根据勾股定理得出 BD，最后比较即可．

【详解】解：$\because AD$ 是 $\vee ABC$ 外接圆的直径，

$\therefore \angle ABD=90^{\circ}$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$

$\therefore \angle C=\angle D$，

$\therefore \sin\angle C=\sin\angle D=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$\therefore AB=2\sqrt{3}$，

$\therefore BD=\sqrt{AD^{2}-AB^{2}}=\sqrt{12^{2}-\left(2\sqrt{3}\right)^{2}}=2\sqrt{33}$，

$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{11}}{11}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{11}}{11}$

【点睛】本题主要考查了同弧所对的圆周角相等，直径所对的原周角是 90 度，勾股定理，解直角三角形的相关计算，掌握这些知识是解题的关键．

15．$\frac{1}{3}$

【分析】连接 OA，OB，证明△AOB 是等边三角形，继而求得 AB 的长，然后利用弧长公式可以计算出 $\overset{\frown}{BOC}$ 的长度，再根据扇形围成圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长即可作答．

【详解】连接 OA，OB，

则∠BAO=$\frac{1}{2}$∠BAC=$\frac{1}{2}\times 120^{\circ}$=60°，

又∵OA=OB，

∴△AOB 是等边三角形，

∴AB=OA=1，

∵∠BAC=120°，

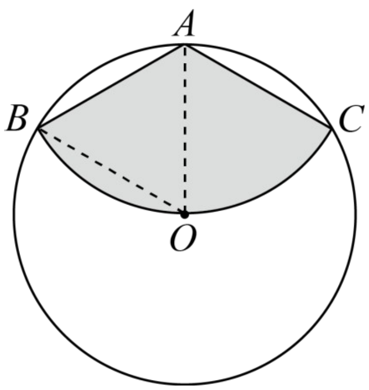
∴ $\overset{\frown}{BOC}$ 的长为：$\frac{120\times\pi\times \mathrm{AB}}{180}=\frac{2\pi}{3}$，

设圆锥底面圆的半径为 r

$2\pi r=\frac{2\pi}{3}$

$r=\frac{1}{3}$

故答案为$\frac{1}{3}$．

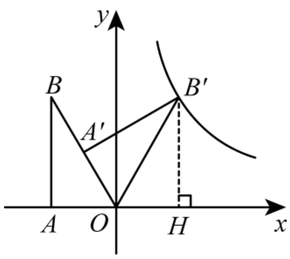


【点睛】本题主要考查了弧长公式以及扇形弧长与底面圆周长相等的知识点，借助等量关系即可算出底面圆的半径．

16．$\sqrt{3}$

【分析】本题考查了如何确定反比例函数的关系式，利用三角函数求角度及勾股定理的应用是解题关键．由题意得$OA'=OA=\frac{1}{2}OB$，得出$\angle AOB=60^{\circ}$，根据旋转得出$\angle B'OH=60^{\circ}$，再根据30°角直角三角形和勾股定理求出点B'坐标即可．

【详解】解：作$B'H\perp x$轴，



$\because \angle AOA' = 60^\circ$，$\angle BAO = 90^\circ$，

$\therefore \angle ABO = 30^\circ$，

$\therefore OA = \frac{1}{2}OB$，

由旋转可知，$OA' = OA = \frac{1}{2}OB$

$\because \triangle ABO$绕点O旋转至$\triangle A'B'O$的位置，

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle A'B'O$，

$\therefore \angle BOB' = 60^\circ$

$\therefore \angle B'OH = 60^\circ$

$\because OA = 1$，

$\therefore BO = B'O = 2$

$\therefore OH = 1$，$B'H = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

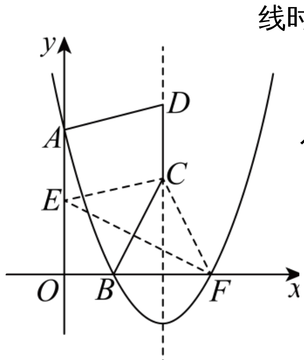
$\therefore$点H的坐标是$\left(1,\sqrt{3}\right)$，

$\therefore k = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

故答案为：$\sqrt{3}$．

17．$(4,1)$

【分析】在y轴上取点$E(0,3)$，证明四边形$AECD$是平行四边形，得出$AD = CE$，利用抛物线的对称性得出$BC = CF$，则$AD + BC = CE + CF \geq EF$，当$E$、$C$、$F$三点共线时，$AD + BC$最小，利用待定系数法求出直线$EF$解析式，然后把$x = 4$代入，



即可求出C的坐标．

【详解】解：$y=\frac{1}{2}x^2-4x+6=\frac{1}{2}(x-4)^2-2$，

∴对称轴为$x=4$，

如图，设抛物线与x轴另一个交点为F，

当$x=0$时，$y=6$，

∴$A(0,6)$，

当$y=0$时，$0=\frac{1}{2}x^2-4x+6$，

解得$x_1=2$，$x_2=6$，

∴$B(2,0)$，$F(6,0)$，

在y轴上取点$E(0,3)$，连接CE，CF，EF，

∴$AE=3=CD$，

∵$CD\parallel AE$，

∴四边形$AECD$是平行四边形，

∴$AD=CE$，

∵抛物线对称轴为$x=4$，

∴$BC=CF$，

∴$AD+BC=CE+CF\geq EF$，

当E、C、F三点共线时，$AD+BC$最小，

设直线EF解析式为$y=kx+b$，

∴$\begin{cases}6k+b=0\\b=3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}\\ b=3\end{cases}$，

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+3$，

当$x=4$时，$y=-\dfrac{1}{2}\times4+3=1$，

$\therefore$当$AD+BC$最小时，C的坐标为$(4,1)$，

故答案为：$(4,1)$．

【点睛】本题考查了二次函数的性质，平行四边形的判定与性质，待定系数法求一次函数解析式，两点之间线段最短等知识，明确题意，添加合适辅助线，构造平行四边形是解题的关键．

三、解答题（本大题共 8 小题，共 50 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

18.（4分）解：（1）$\dfrac{1}{2}\cos60^\circ-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\left|2-\sqrt{5}\right|+(2024-\pi)^0$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{4}-(\sqrt{5}-2)+1$ ....2 分

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}-\sqrt{5}+2+1$ ....3 分

$=1-\sqrt{5}$；..4 分

19.（5分）解：$\left(\dfrac{8}{a+3}+a-3\right)\div\dfrac{a^2+2a+1}{a+3}-\dfrac{a}{a+1}$

$=\dfrac{8+(a-3)(a+3)}{a+3}\div\dfrac{(a+1)^2}{a+3}-\dfrac{a}{a+1}$ ....0.5 分

$=\frac{(a+1)(a-1)}{a+3}\times\frac{a+3}{(a+1)^2}-\frac{a}{a+1}$ ....1 分

$=\frac{a-1}{a+1}-\frac{a}{a+1}$ ....1.5 分

$=-\frac{1}{a+1}$ ；..2.5 分

$\begin{cases} a-1\le -2 \\ -2\le \frac{a}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$，

解 $a-1\le -2$，得，$a\le -1$，...3 分

解 $-2\le \frac{a}{2}-\frac{1}{4}$，得，$a\ge -3.5$，..3.5 分

∴ $-3.5\le a\le -1$，..4 分

∴整式解为 -3，-2，-1，

∵ $a+3\ne 0$，$a+1\ne 0$，

∴ $a\ne -3$，$a\ne -1$，

∴ $a=-2$，...4.5 分

当 $a=-2$ 时，原式 $=-\frac{1}{(-2)+1}=1$．..5 分

20.（6 分）（1）∵四边形 ABCD 是平行四边形

∴AD∥BC ....0.5 分

∴∠EDO=∠FBO，∠DEO=∠BFO.......................................1 分

∵EF 是 BD 的垂直平分线

∴DO=BO，EF⊥BD..1.5 分

∴△EOD≌△FOB(AAS) ....2 分

$\therefore$EO=OF………………………………………………………………2.5 分

$\because$BO=OD，EF⊥BD

$\therefore$四边形 BFDE 是菱形…………………………………………………3 分

（2）$\because$四边形 BFDE 是菱形，BD=8

$\therefore$BO=OD=4　…………………………………………………………3.5 分

$\because$ED=5，EF⊥BD

$\therefore$在 Rt△EOD 中，EO=3…………………………………………………4 分

$\therefore$OF=3，$\therefore$EF=6……………………………………………………………4.5 分

$\therefore$ $S_{\text{菱形}EBFD}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$ ………………………………………………6 分

21.（6 分）（1）解：设 A 款保温杯的销售单价是 x 元，B 款保温杯的销售单价是（x+10）元，

…………………………………………………0.5 分

$\frac{480}{x+10}=\frac{360}{x}$ ，……………………………1 分

解答 x=30，…………………………………2 分

经检验，x=30 是原方程的解，……………………………2.5 分

$\therefore x$+10=40，

答：A 款保温杯的销售单价是 30 元，B 款保温杯的销售单价是 40 元；……………………………3 分

（2）B 款保温杯销售单价为 40×（1-10%）=36 元，

设购进 B 款保温杯数量为 y 个，则 A 款保温杯数量为（120-y）个，……………………………3.5 分

120-y≥2y，…………………………………………………………………………………4 分

解得 y≤40，

$\therefore 0< y\leq 40$，...4.5 分

设总销售利润为 W 元，

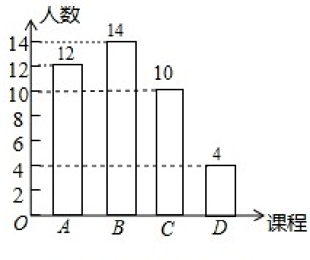
$W=$（30-20）（120-y）+（36-20）$y=6y+1200$，...5 分

$\because W$ 随 y 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $y=40$ 时，利润 W 最大，最大为 $6\times 40+1200=1440$ 元，................................5.5 分

进货方式为购进 B 款保温杯数量为 40 个，A 款保温杯数量为 80 个，最大利润是 1440

元．..6 分



课程选择情况条形统计图

22.（6 分）（1）由题意可知，七年级抽取学生的成绩中出现次数最多的是 8，共出现了 8 次， 众数为 8，故 $a=8$，

由八年级抽取学生的测试成绩条形统计图可知，处在中间位置的是 8，

故中位数是 8，故 $b=8$，

故答案为：8，8 ....1 分

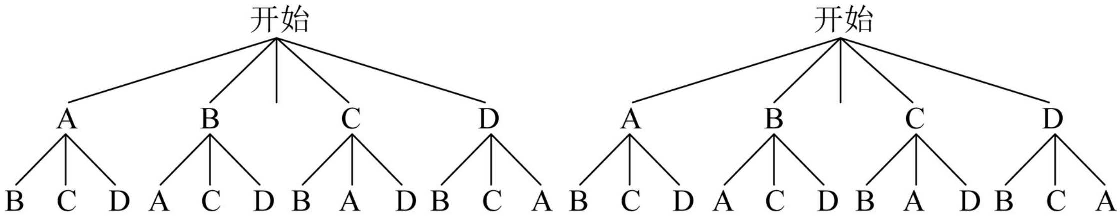
（2）该校七、八年级中，七年级的学生党史知识掌握得较好，理由是七年级学生成绩的众数高于八年级学生成绩的众数； ....（言之有理即可）2 分

（3）$500\times 80\%+500\times 60\%=700$（人），

答：估计七、八年级学生对党史知识掌握能够达到优秀的总人数是 700 人；............. 3 分

（3）设七年级获得 10 分的学生为 A，八年级获得 10 分的学生为 B、C、D，画树状图

如下：



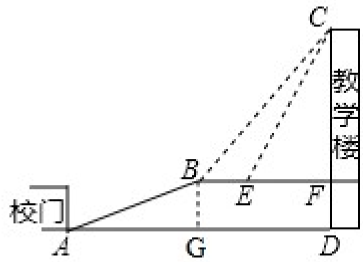
---5 分

被选中的 2 人恰好是七、八年级各 1 人的情况数共有 6 种，总的情况数是 12 种，故被

选中的 2 人恰好是七、八年级各 1 人的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ ．.............................. 6 分

23.（6 分）解：（1）如图，过点 B 作 $BG\perp AD$ 于点 G ，则 $BG=10$ ，..................................0.5 分

$\because i=\frac{BG}{AG}=\frac{5}{12}$ ，



$\therefore AG=24$ ，...1.5 分

则 $AB=\sqrt{AG^2+BG^2}=\sqrt{10^2+24^2}=26$ ，..............................2 分

答：斜坡 AB 的长度为 26 米；.......................................2.5 分

（2）设 $EF=x$ 米，则 $BF=6+x$ （米），........................3.5 分

$\because$ 在 $Rt\triangle BCF$ 中，$CF=BF\tan\angle CBF=(6+x)\tan 53^\circ$ ，.....................4 分

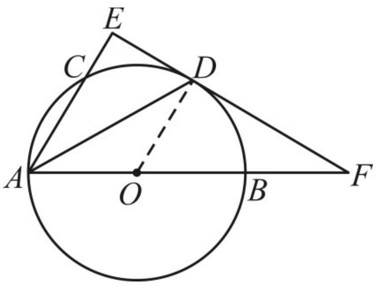
在 $Rt\triangle ECF$ 中，$CF=EF\tan\angle CEF=\tan 63.4^\circ x$ ，...........................4.5 分

$\therefore (6+x)\tan 53^\circ=\tan 63.4^\circ x$ ，...5 分

解得：$x=\frac{6\cdot\tan 53^\circ}{\tan 63.4^\circ-\tan 53^\circ}\approx 12$ ，..5.5 分

答：旗杆处离教学楼的距离约为 12 米．..6 分

24.（8分）（1）证明：如图，连接OD，..0.5分



$\because OA=OD$，

$\therefore \angle DAO=\angle ODA$，..1分

$\because D$是弧BC的中点，

$\therefore \angle CAD=\angle DAB$，

$\therefore \angle CAD=\angle ODA$，...1.5分

$\therefore OD\parallel AE$，...2分

$\because DE\perp AE$，

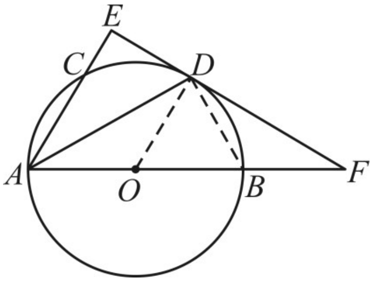
$\therefore OD\perp DE$，..2.5分

$\therefore DE$是$\odot O$的切线；.......................................3分

（2）解：在$Rt\triangle ADE$中，$\because AE=8$，$\tan\angle ADE=2$，

$\therefore DE=4$，$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，..3.5分

如图，连接BD，



$\because AB$为直径，

$\therefore \angle E=\angle ADB=90^{\circ}$，…………………………………………………………4 分

$\because \angle EAD=\angle DAB$，

$\therefore \triangle AED\backsim\triangle ADB$，…………………………………………………………4.5 分

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$，

$\therefore AB=\frac{AD^2}{AE}=\frac{\left(4\sqrt{5}\right)^2}{8}=10$，……………………………………………………5 分

$\therefore \odot O$ 的半径为 5，…………………………………………………………………5.5 分

$\because DE\perp AE$，$OD\perp DE$，

$\therefore \angle AEF=\angle ODF=90^{\circ}$，……………………………………………………………6 分

又$\because \angle AFE=\angle OFD$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ODF$，…………………………………………………………6.5 分

$\therefore \frac{OD}{AE}=\frac{OF}{AF}$，……………………………………………………………………7 分

$\therefore \frac{5}{8}=\frac{5+BF}{10+BF}$，…………………………………………………………………7.5 分

解得$BF=\frac{10}{3}$．…………………………………………………………………………8 分

25（9 分）（1）解：抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$过点$A(2,0)$，点$C(0,6)$，

$\therefore \begin{cases}0=\frac{1}{2}\times2^2+2b+c\\6=c\end{cases}$，…………………………………………………………0.5 分

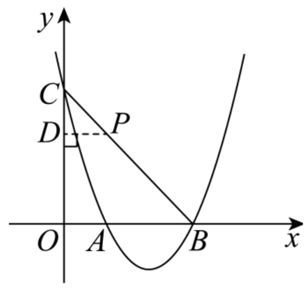
解得$\begin{cases}b=-4\\c=6\end{cases}$，…………………………………………………………………1 分

$\therefore$抛物线表达式为$y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$；…………………………………………………1.5 分

（2）令 $y=0$，解得 $x_1=2, x_2=6$，

$\therefore A(2,0), B(6,0)$，..2 分

过点 P 作 $PD\perp y$ 轴，垂足为 D，



$\therefore \angle CDP=\angle COB=90^\circ$，..2.5 分

$\angle DCP=\angle OCB$，

$\therefore \triangle CPD\backsim\triangle CBO$，..3 分

$\therefore \dfrac{CD}{CO}=\dfrac{DP}{OB}$，..3.5 分

$BP=2CP$，

$\therefore \dfrac{CD}{CO}=\dfrac{DP}{OB}=\dfrac{1}{3}$，...4 分

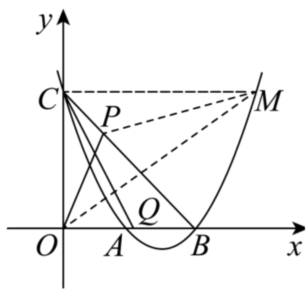
$\therefore CD=2, DP=2$，...4.5 分

$\therefore OD=OC-CD=6-2=4$，

$\therefore P(2,4)$；...5 分

（3）由题意得，$CP=BQ$，在 OB 上方作 $\triangle OPM$，使得 $\angle PCM=45^\circ$，$CM=BC$，..............5.5 分

$OC=OB=6$，



$\therefore \angle CBQ=\angle OCB=45^\circ$，$BC=6\sqrt{2}$，.....................................6 分

在 $\triangle CBQ$ 和 $\triangle MCP$ 中

$$\begin{cases} BQ=CP \\ \angle CBQ=\angle MCP \\ BC=CM \end{cases}$$

$\therefore \triangle CBQ\cong\triangle MCP(\text{SAS})$，...7 分

$\therefore CQ = MP$,

$\therefore OP + CQ = OP + MP \geq OM$, ...7.5 分

$\therefore OP + CQ$ 的最小值为 OM，..8 分

$\because \angle OCM = \angle OCB + \angle BCM = 90^{\circ}$,

$\therefore OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 6\sqrt{3}$，...................................8.5 分

即 $OP + CQ$ 的最小值为 $6\sqrt{3}$．...9 分