（高中数学）答案

（考试时间：120 分钟,满分：150 分）

本试卷分第 Ⅰ 卷（选择题）和第 Ⅱ 卷（非选择题）两部分．

考生注意：

1．答题前,考生务必将自己的考生号,姓名填写在试卷卷,答题卡上．考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“考生号,姓名”与考生本人考生号,姓名是否一致．

2．第 Ⅰ 卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其他答案标号．第 Ⅱ 卷用黑色字迹签字笔在答题卡上作答．在试卷卷上作答,答案无效．

3．考试结束,监考员将试卷卷和答题卡一并收回．

参考公式：

样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **的标准差** $s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]}$

其中 $\overline{x}$ **为样本平均数**

柱体体积公式 $V=Sh$ **,其中 S 为底面面积,h 为高台体体积公式** $V=\frac{1}{3}\left(S'+\sqrt{S'S}+S\right)h$.

其中 S'**,S 分别为上,下底面面积,h 为高**

锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ **,其中 S 为底面面积,h 为高**

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$ **,球的体积公式** $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ **,其中 R 为球的半径**

第 Ⅰ 卷（选择题 57 分）

一,选择题（本题共 19 小题,每小题 3 分,共计 57 分．在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.）

1. **答案**：A。高中数学课程目标中的 “四基” 明确指基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，这是学生进一步学习和未来发展的重要基础。
2. **答案**：B。必修课程是整个高中数学课程的基础，所有学生都必须学习，为后续选择性必修和选修课程的学习做好铺垫。
3. 【答案】B
4. 【答案】C
5. 【答案】D
6. 【答案】B
7. 【答案】D
8. 【答案】D

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分

9 ACD　10 AC　　11 AC

第Ⅱ卷（非选择题 92 分）

二、填空题（本题共 3 个小题,每小题 5 分,共 15 分．请将答案填在题中横线上．）

12．设向量 $\vec{a},\vec{b}$ **满足** $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=9$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$**,则** $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$____.

【答案】 $16-18\sqrt{3}$

【知识点】用定义求向量的数量积,数量积的运算律

【分析】直接由向量数量积定义,运算律即可求解.

【详解】 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=16-4\times9\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=16-18\sqrt{3}$.

故答案为： $16-18\sqrt{3}$.

13．若 $f(x)=ax+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ **为偶函数,则实数** $a=$____.

【答案】0

【知识点】由余弦（型）函数的奇偶性求参数,由奇偶性求参数,三角函数的化简,求值——诱导公式

【分析】由 $f(x)=f(-x)$ **即可求解.**

【详解】由 $f(x)=ax+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), x\in\mathrm{R}$ **得：** $f(x)=ax+\cos x$,

由题意可知： $f(-x)=-ax+\cos x=ax+\cos x=f(x)$,

可得： $2ax=0$ **恒成立.**

所以 $a=0$.

故答案为：0

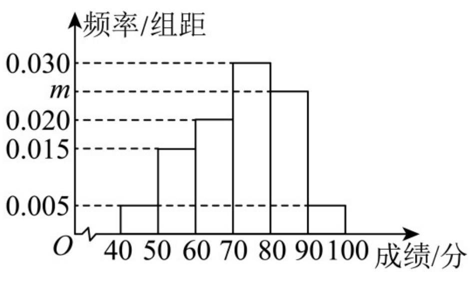
14．学业质量是学生在完成相应课程模块学习后的表现，学业质量标准是以 ________________为主要维度，结合课程内容，对学生学业成就表现的总体刻画。

【答案】数学核心素养 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15（本小题满分 13 分）

某校为了增强学生的身体素质,积极开展体育锻炼,并给学生的锻炼情况进行测评打分．现从中随机选出 100 名学生的成绩（满分为 100 分）,按分数分为 [40,50）,[50,60）,[60,70）,[70,80）,[80,90）,[90,100],共 6 组,得到如图所示的频率分布直方图．



(1)求 m 的值,并求这 100 名学生成绩的平均数和中位数（保留一位小数）.

(2)现采用分层抽样的方式从［50,60）和［70,80）的学生中抽取 6 名学生参加运动交流会,大会上需要从这 6 名学生中随机抽取 2 名学生进行经验交流发言,求抽取的 2 名发言者分数差大于 10 分的概率．

【答案】(1) $m=0.025$,平均数为 72 分 ,中位数为 73.3 分

(2) $\frac{8}{15}$

【知识点】由频率分布直方图估计平均数,计算古典概型问题的概率,由频率分布直方图计算频率,频数,样本容量,总体容量,由频率分布直方图估计中位数

【分析】（1）利用个小矩形面积之和为 1 求解,再利用平均数和中位数的公式求解即可.

（2）先求出每个区间抽取的人数,然后利用古典概型的概率公式求解即可.

【详解】（1） $(0.005+0.015+0.020+0.030+m+0.005)\times 10=1$,解得 $m=0.025$.……………2 分

平均数为 $45\times 0.05+55\times 0.15+65\times 0.20+75\times 0.30+85\times 0.25+95\times 0.05=72$.……………4 分

中位数为 $70+\frac{0.1}{0.3}\times 10\approx 73.3$ 分.………………………………6 分

（2）在[50,60）中抽取 $6\times\frac{0.015}{0.015+0.030}=2$ 人,记为 a_1,a_2.……………………7 分

在[70,80）中抽取 $6-2=4$ 人,记为 b_1,b_2,b_3,b_4. 所有的取法为：

$a_1a_2,a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_1b_4,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,a_2b_4,b_1b_2,b_1b_3,b_1b_4,b_2b_3,b_2b_4,b_3b_4$ 共 15 种.……………9 分

$a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_1b_4,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,a_2b_4$,满足条件的有共 8 种. ……………………11 分

所求概率为 $\frac{8}{15}$.……………………………………13 分

16．(1)证明过程见解析

(2)$\frac{2}{3}$

【分析】(1)由面面垂直得到线面垂直，进而得到 $AC \perp PO$，$BD \perp PO$，故 $PO \perp$ 平面 $ABCD$；

（2）建立空间直角坐标系，写出点的坐标，设 $P(0,0,t)$，$t>0$，根据线面角的正弦值得到方程，求出 $t=\frac{1}{2}$，求出两个平面的法向量，根据面面角夹角余弦公式求出答案.

【详解】（1）因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC \perp BD$，

因为平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$，BD 为交线，$AC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AC \perp$ 平面 PBD，

因为 $PO \subset$ 平面 PBD，所以 $AC \perp PO$，

因为平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$，AC 为交线，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BD \perp$ 平面 PBD，

因为 $PO \subset$ 平面 PBD，所以 $BD \perp PO$，

因为 $AC \cap BD = O$，$AC, BD \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$；

（2）由（1）知，AC, PO, BD 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OA, OB, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，

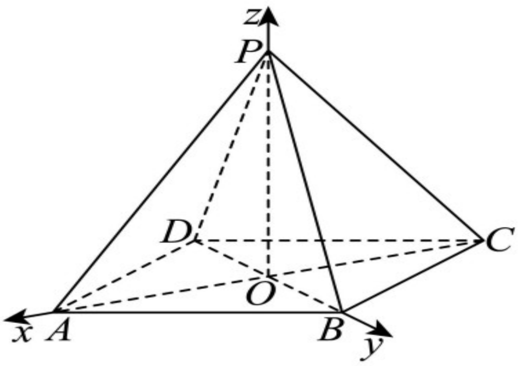
$OA = 2OD = 2$，则 $D(0,-1,0), C(-2,0,0), B(0,1,0)$，$\overrightarrow{DC} = (-2,1,0)$，

设 $P(0,0,t)$，$t>0$，则 $\overrightarrow{PB} = (0,1,-t)$，$\overrightarrow{CB} = (2,1,0)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$，

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = (x,y,z) \cdot (0,1,-t) = y - tz = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CB} = (x,y,z) \cdot (2,1,0) = 2x + y = 0 \end{cases},$$

令 $z=1$ 得 $y = 2t, x = -t$，故 $\vec{m} = (-t, 2t, 1)$，



直线 DC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$，

即 $\left|\cos\overrightarrow{DC},\vec{m}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}=\frac{\left|(-2,1,0)\cdot(-t,2t,1)\right|}{\sqrt{4+1}\times\sqrt{(-t)^2+4t^2+1}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，

化简得 $t=\frac{1}{2}$，负值舍去，则 $\vec{m}=\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$，

平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$，

设平面 PAC 与平面 PBC 夹角为 θ，

$$\cos\theta=\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\left(-\frac{1}{2},1,1\right)\cdot(0,1,0)\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}}=\frac{2}{3},$$

所以平面 PAC 与平面 PBC 夹角余弦值为 $\frac{2}{3}$.

17．解：

（1）因为$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$，点$B\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$， • 1分

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\cos\alpha$， • 2分

所以$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， • 2分

又α为锐角，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， • 3分

因为钝角β的终边与单位圆O的交点C的横坐标是$-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$， • • • • • • • • • • • • • • • • • • 4分

所以$\cos\beta=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$， • • • • • • • • • • • • • • • • • • 4分

所以$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right)+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ • • • • • • • • • 5分

（2）由（1）知$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$， ··········6分

所以$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$， ····························7分

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$ ····························8分

所以$\sin(\beta-2\alpha)=\sin\beta\cos 2\alpha-\cos\beta\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ·······9分

因为α为锐角，

所以$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， ····························10分

所以$0<2\alpha<\pi$，
又$\cos 2\alpha<0$， ····························11分

所以$2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ····························12分

又$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$， ····························13分

所以$2\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$， ····························14分

所以$\beta-2\alpha=\frac{\pi}{4}$. ····························15分

18、（本小题满分17分）

已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2 x$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期及单调递增区间.

(2)若$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,求函数$f(x)$的值域.

(3)若函数$g(x)=f(x)-1$在$\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$上有且仅有两个零点,则求$m$的取值范围.

【答案】(1)最小正周期为π,单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$,$k\in Z$.

(2)$[0,3]$

(3)$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$

【知识点】求含sinx(型)函数的值域和最值,求正弦（型）函数的最小正周期,根据函数零点的个数求参数范围,求sinx型三角函数的单调性

【分析】（1）利用三角恒等变换得到$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,求出最小正周期,整体法得到函数单调递增区间.

（2）在（1）基础上,得到$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,求出$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1\in[0,3]$.

（3）转化为$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$在$\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$上有且仅有两个解,求出$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$,数形结合得到$\pi\le 2m+\frac{\pi}{6}<2\pi$,求出答案.

【详解】（1）$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2 x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\times\frac{1+\cos 2x}{2}$ 1分

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 2分

$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ 3分

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ 4分

解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$ 5分

故单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$, $k\in Z$ 6分

（2）$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$, $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 7分

故$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$, $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1\in[0,3]$ 8分

故函数值域为$[0,3]$ 9分

（3）函数$g(x)=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow f(x)=1$ 10分

即$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1=1$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ 11分

故$g(x)=f(x)-1$在$\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$上有且仅有两个零点.......................12分

等价于$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$在$\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$上有且仅有两个解.....................13分

$x\in\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$, $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$ 14分

要想$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$在$\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$上有且仅有两个解........................15分

则$\pi\le 2m+\frac{\pi}{6}<2\pi$,解得$\frac{5\pi}{12}\le m<\frac{11\pi}{12}$ 16分

故 m 的取值范围为 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$.……………………………17 分

19、论述题答案

1. **高中数学课程标准中对数学文化的要求**：高中数学课程标准强调数学文化在数学教学中的重要性，要求将数学文化融入数学课程内容和教学过程中。数学文化包括数学的历史、思想、精神、方法、观点以及它们的形成和发展，还包括数学在人类社会进步、人类文明发展中的作用，以及与数学相关的人文活动。通过数学文化的学习，使学生了解数学的发展历程，感受数学的美学价值，体会数学对推动社会发展的重要作用，培养学生的数学人文素养和创新精神，激发学生学习数学的兴趣和热情。
2. **在教学中融入数学文化的举例**：
    - **数学史的融入**：在讲解导数概念时，可以介绍导数的发展历史。导数的概念经历了漫长的发展过程，从古希腊时期对变化率的初步探索，到 17 世纪牛顿和莱布尼茨分别独立创立微积分，导数的概念逐渐完善。通过讲述这段历史，让学生了解导数产生的背景和意义，感受到数学知识的发展是一个不断探索和创新的过程，激发学生的学习兴趣和探索精神。同时，介绍一些著名数学家在导数研究中的贡献和故事，如牛顿在物理学和数学领域的伟大成就，莱布尼茨在符号系统方面的创新等，使学生了解数学家的严谨态度和创新思维，培养学生的科学精神。
    - **数学思想方法的渗透**：在立体几何教学中，渗透转化与化归的数学思想方法。例如，在求解复杂的立体几何问题时，引导学生将其转化为平面几何问题，通过将空间图形中的线面关系、面面关系转化为平面内的线段关系、角度关系来解决。同时，介绍中国古代数学家在立体几何研究中所运用的思想方法，如祖暅原理，让学生了解中国古代数学的辉煌成就，增强民族自豪感。通过这种方式，不仅让学生掌握了数学知识和方法，还让学生了解了数学文化中蕴含的思想精髓，培养学生的数学思维能力和文化素养。
    - **数学与生活实际的联系**：在概率统计教学中，引入生活中的概率统计案例，如彩票中奖概率、市场调查中的抽样方法等，让学生了解概率统计在现实生活中的广泛应用，感受数学与生活的紧密联系。同时，介绍概率统计的发展历程和在社会发展中的重要作用，如在保险行业、质量控制、经济预测等领域的应用，使学生认识到数学对推动社会进步和人类文明发展的重要意义，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力和应用意识，体现数学文化的现实价值。