高中数学专业测试模拟卷参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	B	D	C	B	A	BD	AD
题号	11									
答案	ABD									

1．B

【分析】先确定集合B，再求交集即可.

【详解】集合$A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x<2\}=\{0,1\}$，则$A\cap B=\{0,1\}$

故选：B.

2．D

【分析】根据共轭复数的定义及复数的乘法运算结合纯虚数的定义即可得出答案.

【详解】解：$\bar{z}\cdot(a+\mathrm{i})=(2+3\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=2a-3+(3a+2)\mathrm{i}$是纯虚数，

则$\begin{cases}2a-3=0\\3a+2\neq 0\end{cases}$，解得$a=\frac{3}{2}$.

故选：D.

3．A

【分析】利用集合中元素的互异性，集合并集的运算及充分条件，必要条件的定义即可判断.

【详解】①若$m=3$，则$A=\{1,3,\sqrt{3}\}$，$B=\{1,3\}$，$A\cup B=\{1,3,\sqrt{3}\}=A$，

所以$m=3$”是“$A\cup B=A$”的充分条件；

②若$A\cup B=A$，则$m=3$或$m=\sqrt{m}$，解得$m=3$或$m=0$或$m=1$.

当$m=3$时，$A=\{1,3,\sqrt{3}\}$，$B=\{1,3\}$，$A\cup B=\{1,3,\sqrt{3}\}=A$，符合题意；

当$m=0$时，$A=\{1,3,0\}$，$B=\{1,0\}$，$A\cup B=\{1,3,0\}=A$，符合题意；

当$m=1$时，$A=\{1,3,1\}$，$B=\{1,1\}$，与集合中元素的互异性相矛盾，故舍去，

所以$m=3$或$m=0$，所以$m=3$”是“$A\cup B=A$”的不必要条件，

所以由①②可知，$m=3$”是“$A\cup B=A$”的充分不必要条件，

故选：A

4．B

【分析】利用向量加法和减法计算即可求解.

【详解】$BE=AE-AB=\frac{1}{2}AD-AB=\frac{1}{2}\left(AC+CD\right)-AB$

$=\frac{1}{2}\left(AC+\frac{1}{3}CB\right)-AB=\frac{1}{2}\left[AC+\frac{1}{3}\left(AB-AC\right)\right]-AB$

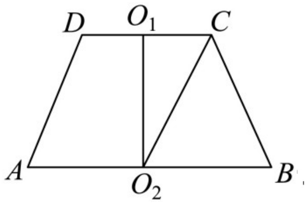
$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}AC+\frac{1}{3}AB\right)-AB=\frac{1}{3}AC-\frac{5}{6}AB$，

故选：B.

5．D

【分析】假设圆O_1的半径，则圆O_2的半径可知，进而通过勾股定理可求圆台的高，分别利用圆台和球的体积计算即可.

【详解】过O_1O_2作圆台的轴截面，如图所示



O_2为该圆台外接球球心，且圆O_2的半径是圆O_1半径的2倍，

不妨设圆O_1的半径$\left|O_1C\right|=R$，则圆O_2的半径$\left|O_2B\right|=2R$,

依题意$\left|O_2C\right|=2R$，$\therefore\left|O_1O_2\right|=\sqrt{\left|O_2C\right|^2-\left|O_1C\right|^2}=\sqrt{4R^2-R^2}=\sqrt{3}R$,

$\therefore V_{圆台}=\frac{1}{3}\left(\pi R^2+4\pi R^2+2\pi R^2\right)\times\sqrt{3}R=\frac{7\sqrt{3}\pi R^3}{3}$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi\left(2R\right)^3=\frac{32\pi R^3}{3}$，

$\therefore \frac{V_{圆台}}{V_{球}}=\frac{\frac{7\sqrt{3}\pi R^3}{3}}{\frac{32\pi R^3}{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{32}$，

故选：D.

6．C

【分析】举反例令 $c=0$ 可得A错误；由不等式的性质可得B错误；作差法可得C正确；举反例可得D错误.

【详解】对于A选项，当 $c=0$ 时不满足，故A错误；

对于B选项，由不等式性质知，$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 两边同时乘以 $c^2>0$，可得 $a>b$，故B错误；

对于C选项，若 $a<b<c<0$，则 $a+c<0$，$b-a>0$，$(b-a)c<0$，$a(a+c)>0$，

故 $\frac{b}{a}-\frac{b+c}{a+c}=\frac{b(a+c)-a(b+c)}{a(a+c)}=\frac{(b-a)c}{a(a+c)}<0$，即 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$，故C正确；

对于D选项，取 $a=-1$，$b=-2$，可得 $a^2<b^2$，故D错误．

故选：C

7．B

【分析】根据分段函数的定义域求解.

【详解】因为函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\le 1\\ -x+3,x>1\end{cases}$，

所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{2}$，

则 $f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，

故选：B

8．A

【解析】由古典概型概率公式分别计算出事件 A 和事件 B 发生的概率，又通过列举可得事件 A 和事件 B 为互斥事件，进而得出事件 A 或事件 B 至少有一个发生的概率即为事件 A 和

事件B的概率之和．

【详解】事件A表示“小于5的偶数点出现”，事件B表示“不小于5的点数出现”，

$\therefore P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

又小于5的偶数点有2和4，不小于5的点数有5和6，

所以事件A和事件B为互斥事件，

则一次试验中，事件A或事件B至少有一个发生的概率为

$P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

故选：A．

【点睛】本题主要考查古典概型计算公式，以及互斥事件概率加法公式的应用，属于中档题．

9．BD

【分析】根据空间中直线与直线的位置关系判断即可.

【详解】解：对于A：若$a\perp b$，$b\perp c$，则$a//c$或a与c相交或a与c异面，故A错误；

对于B：若$a//b$，$b\perp c$，则$a\perp c$，故B正确；

对于C：若$a\perp b$，a不平行于c，则$b//c$或b与c相交或b与c异面，则c与b可以垂直，故C错误；

对于D：若$a//b$，b不垂直于c，若$a\perp c$，由$a//b$，则$b\perp c$，与题设矛盾，故a一定不垂直于c，故D正确；

故选：BD

10．AD

【分析】选项A：利用指数函数的定义结合指数函数的单调性求解即可，选项B：根据指数函数的值域求解即可，选项C：根据函数图像的平移变化求解即可，选项D:根据指数函数过定点结合函数的图像变化求解即可.

【详解】对于A，$2a^2-3a+2=1$且$a>0,a\neq 1$，$a=\frac{1}{2}$，A正确；

对于B，不论$0<a<1$，还是$a>1$，值域都为$\left(0,+\infty\right)$，B错误；

对于C，$f(x)=a^x$向左平移一个单位得到$f(x)=a^{x+1}$，C错误；

对于D，令$2x+3=0$，则$x=-\frac{3}{2},y=0$，所以函数$y=a^{2x+3}-1$恒过定点$\left(-\frac{3}{2},0\right)$，

故D正确．

故选：AD.

11．ABD

【分析】根据图象的平移变换可得$g(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})$，根据正切函数的对称中心可求A，根据周期公式可求B，利用正切函数的单调性可求C，根据正切函数不是轴对称图形可求D.

【详解】将函数$y=f(x)$的图象向左平移$\frac{1}{3}$个单位长度可得函数$y=\tan(\pi x+\frac{\pi}{3})$，

然后纵坐标不变，横坐标伸长为原来的2倍，得到函数$g(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})$，

令$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in Z$解得$x=-\frac{2}{3}+k,k\in Z$，当$k=0$时$x=-\frac{2}{3}$，

所以函数$g(x)$的图象关于点$\left(-\frac{2}{3},0\right)$成中心对称，A正确；

函数$g(x)$的最小正周期为$T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$，B正确；

令$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$解得$-\frac{5}{3}+2k<x<\frac{1}{3}+2k,k\in Z$，

所以函数$g(x)$的单调增区间为$\left(-\frac{5}{3}+2k,\frac{1}{3}+2k\right)$，$k\in \mathbf{Z}$，C错误；

正切函数不是轴对称图形，D正确，

故选:ABD.

12．$-\frac{1}{5}$/-0.2

【分析】根据已知条件，可以求出$\tan 2\alpha$的值，利用正切函数的二倍角公式可求得$\tan\alpha$的

值，然后利用余弦函数的二倍角公式以及$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$、$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$对所求式进行转化，转化为只含有$\tan\alpha$的式子进行求解.

【详解】由$3\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=0$得$\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$，故$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{4}{3}$，

所以$2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-2=0$，解得$\tan\alpha=2$，或$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

因为$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\tan\alpha=2$，

所以$\dfrac{\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{1-2}{4+1}=-\dfrac{1}{5}$.

故答案为：$-\dfrac{1}{5}$

13．$m-1$

【分析】根据数列的递推关系式可得$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，结合累加法可得$S_n=a_{n+2}-1$，从而可得所求.

【详解】$\because a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right),\therefore a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，

$\therefore a_1=a_3-a_2,a_2=a_4-a_3,a_3=a_5-a_4,\cdots,a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，

将这n个式子的左右两边分别相加可得$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+2}-a_2=a_{n+2}-1$，

$\therefore S_n+1=a_{n+2}$，

$\therefore S_{2025}=a_{2027}-1=m-1$.

故答案为：$m-1$.

14．$2x-y+1=0$和$x-y+1=0$

【分析】设过点P的切线与曲线相切于点Q，然后根据曲线在点Q处切线的切线方程，求

出切点坐标，从而可求出结果．

【详解】由题干得$y' = 3x^2 - 4x + 2$,设曲线$y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$与过点$P(0,1)$的切线相切于点$Q(x_0, y_0)$，

设切线的斜率为k，则由点斜式得直线方程为$y - 1 = k(x - 0)$，又因为切点为$Q(x_0, y_0)$，

则$\begin{cases} k = y'|_{x=x_0} = 3{x_0}^2 - 4x_0 + 2 \\ y_0 - 1 = k(x_0 - 0) \\ y_0 = x_0^3 - 2x_0^2 + 2x_0 + 1 \end{cases}$，解得$k = 1$或$k = 2$，

则曲线过点$P(0,1)$处的切线方程为$2x - y + 1 = 0$和$x - y + 1 = 0$.

故答案为：$2x - y + 1 = 0$和$x - y + 1 = 0$

15．(1)证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{39}}{13}$

【分析】（1）利用线面平行的判定定理即可求解；

（2）利用等体积法求解点C到平面ABC_1的距离即可.

【详解】（1）证明：∵$ABC - A_1B_1C_1$为直三棱柱，∴$A_1B_1 \parallel AB$

又$A_1B_1 \not\subset$平面ABC_1，$AB \subset$平面ABC_1，

∴$A_1B_1 \parallel$平面ABC_1

（2）解：在$\triangle ABC$中，$AC = BC = 1$，$\angle ACB = 120°$，

则$AB = \sqrt{3}$，$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

∵$ABC - A_1B_1C_1$为直三棱柱，∴$CC_1 \perp$平面ABC，

$\therefore CC_1 \perp AC$，从而 $AC_1 = BC_1 = 2$

取 AB 的中点 D，连接 C_1D，则 $C_1D \perp AB$，$C_1D = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

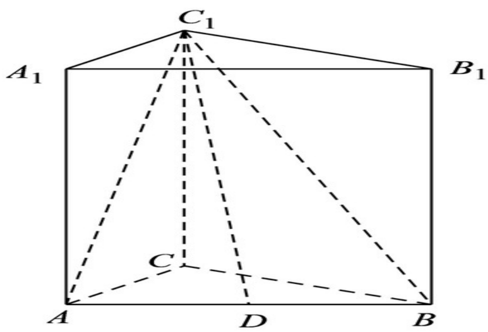
$\therefore \triangle ABC_1$ 的面积为 $\dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{13}}{2} = \dfrac{\sqrt{39}}{4}$，

设点 C 到平面 ABC_1 的距离为 h，

由于 $V_{C_1-ABC} = V_{C-ABC_1}$

$\therefore \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{39}}{4} \times h$，解得 $h = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$

故点 C 到平面 ABC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.



16．(1) 0.06；(2)平均数为 174.1，中位数为 174.5；(3) $P(E) = \dfrac{7}{15}$．

【分析】(1)由频率分布直方图的性质求第七组的频率；

(2)根据平均数和中位数的定义利用频率分布直方图求平均数和中位数；

(3)确定样本空间，利用古典概型概率公式求概率.

【详解】解：(1)第六组的频率为 $\dfrac{4}{50} = 0.08$，

$\therefore$第七组的频率为 $1 - 0.08 - 5 \times (0.008 \times 2 + 0.016 + 0.04 \times 2 + 0.06) = 0.06$．

(2)由直方图得，身高在第一组$[155,160)$的频率为$0.008\times5=0.04$，

身高在第二组$[160,165)$的频率为$0.016\times5=0.08$，

身高在第三组$[165,170)$的频率为$0.04\times5=0.2$，

身高在第四组$[170,175)$的频率为$0.04\times5=0.2$，

由于$0.04+0.08+0.2=0.32<0.5$，$0.04+0.08+0.2+0.2=0.52>0.5$，

设这所学校的800名男生的身高中位数为m，则$170<m<175$，

由$0.04+0.08+0.2+(m-170)\times0.04=0.5$得$m=174.5$，

所以这所学校的800名男生的身高的中位数为174.5cm，平均数为

$157.5\times0.04+162.5\times0.08+167.5\times0.2+172.5\times0.2+177.5\times0.06\times5+182.5\times0.08+187.5\times0.06+$

$192.5\times0.008\times5=174.1$.

(3)第六组$[180,185)$的抽取人数为4，设所抽取的人为a，b，c，d，

第八组$[190,195]$的抽取人数为$0.008\times5\times50=2$，设所抽取的人为A，B，

则从中随机抽取两名男生有

ab，ac，ad，bc，bd，cd，aA，aB，bA，bB，cA，cB，dA，dB，AB共15种情况，

因事件$E=\{|x-y|\leq5\}$发生当且仅当随机抽取的两名男生在同一组，所以事件E包含的基本

事件为ab，ac，ad，bc，bd，cd，AB共7种情况．所以$P(E)=\frac{7}{15}$．

17．(1)$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

(2)2

【分析】（1）利用已知条件可列方程组求解即可；

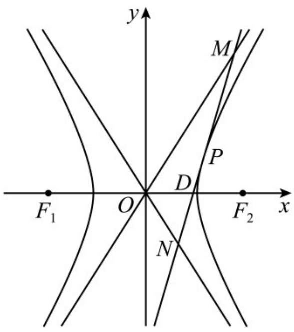
（2）利用直线与双曲线相切，借助方程组判别式为0来找到参数相等关系，然后计算面积

可求得是定值.

【详解】（1）由题意可得$\begin{cases}\dfrac{8}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\\ c^2=5\end{cases}$，

故双曲线C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

（2）



当直线斜率不存在时，易知此时$P(2,0)$，直线$l:x=2$，

不妨设$M(2,1),N(2,-1)$，得$S_{\triangle MON}=2$；

当直线斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+m$，

与双曲线的方程$x^2-4y^2=4$联立，可得$(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2+4=0$，

由直线与双曲线的右支相切，可得$\Delta=(8km)^2-4(4k^2-1)(4m^2+4)=0$，故$4k^2=m^2+1$

设直线l与x轴交于D，则$D\left(-\dfrac{m}{k},0\right)$．

又双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$，

联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=kx+m \end{cases}$，可得$M\left(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k}\right)$，同理可得$N\left(-\frac{2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k}\right)$，

$S_{\triangle MON}=S_{\triangle MOD}+S_{\triangle NOD}=\frac{1}{2}|OD||y_M-y_N|=\left|\frac{-m}{2k}\right|\cdot|k|\cdot|x_M-x_N|$

$=\left|\frac{-m}{2k}\right|\cdot|k|\cdot\left|\frac{2m}{1+2k}+\frac{2m}{1-2k}\right|=\left|\frac{-m}{2k}\right|\cdot|k|\cdot\left|\frac{4m}{1-4k^2}\right|=\frac{2m^2}{m^2}=2$

综上，$\triangle MON$面积为2．

18．(1)证明见解析，$b_n=2^{n+1}$

(2)$T_n=(2n-1)\cdot 2^{n+2}+4$

【分析】（1）根据$a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$，即可根据等比数列的定义证明$\{b_n\}$为等比，求解首项，即可利用等比数列的通项公式求解，

（2）利用错位相减法求和，结合等比数列的求和公式即可化简求解.

【详解】（1）因为$a_{n+1}=2a_n+1$，则$a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$，所以$b_{n+1}=2b_n$，

又$a_2=7$，则$a_1=3$，故$b_1=a_1+1=4$，因此$\{b_n\}$是以4为首项，2为公比的等比数列,

则$b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1},n\in\mathbf{N}^*$.

（2）由（1）知，$c_n=(2n+1)b_n=(2n+1)2^{n+1}$，所以

$T_n=3\times 2^2+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n+1)\cdot 2^{n+1}$①，

则$2T_n=3\times 2^3+5\times 2^4+7\times 2^5+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n+1}+(2n+1)\cdot 2^{n+2}$②，

由①-②得到$-T_n=3\cdot 2^2+2\cdot(2^3+2^4+\cdots+2^n+2^{n+1})-(2n+1)2^{n+2}$

$=2\times(2^2+2^3+\cdots+2^n+2^{n+1})+4-(2n+1)\cdot 2^{n+2}$，

故$-T_n=2\times\frac{2^2\times(1-2^n)}{1-2}+4-(2n+1)2^{n+2}=(1-2n)2^{n+2}-4,$

因此$T_n=(2n-1)\cdot 2^{n+2}+4,n\in\mathbf{N}^*$

19．(1)极小值为$f(1)=0$，无极大值

(2)$f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递减，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增

(3)$\{1\}$

【分析】（1）求导即可得到$f'(x)$，再由极值的定义，代入计算，即可得到结果；

（2）求导即可得到$f'(x)$，然后分$a\leq 0$与$a>0$讨论，即可得到结果；

（3）根据题意，分$a\leq 0$以及$a>0$讨论，然后结合（2）中的结论，代入计算，即可得到结果.

【详解】（1）因为$a=1$，所以$f(x)=x^2-2\ln x-1,x>0$，

所以$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

令$f'(x)>0$，得$x>1$；令$f'(x)<0$，得$0<x<1$.

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)$的极小值为$f(1)=0$，无极大值.

（2）因为$f(x)=x^2-2a\ln x-1$，所以$f'(x)=2x-\frac{2a}{x}=\frac{2(x^2-a)}{x}$.

当$a\leq 0$时，$f'(x)>0,f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当$a>0$时，令$f'(x)<0$，得$0<x<\sqrt{a}$，令$f'(x)>0$，得$x>\sqrt{a}$.

故$f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递减，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增．

（3）由（2）知，当$a\leq 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增．

因为$f(1)=0$，所以当$x\in(0,1)$时，$f(x)<0$，不满足题意．

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递减，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=a-a\ln a-1$．若$f(x)\geq 0$，则$f(x)_{\min}=a-a\ln a-1\geq 0$．

令$g(a)=a-a\ln a-1$，则$g'(a)=-\ln a$，所以$g(a)$在$(0,1)$上单调递增，

在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$g(a)\leq g(1)=0$，所以$a=1$，即实数a的取值集合为$\{1\}$．