高中数学专业测试模拟卷

一、单选题（3*8=24分）

1．集合$A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$B=\{x\in \mathbf{N}|x<2\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{x|-1\le x<2\}$

2．已知复数$z=2-3i$，若$\bar{z}\cdot(a+i)$是纯虚数，则实数$a=$（　）

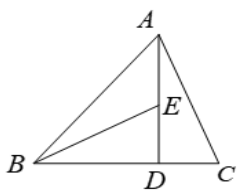
A．$-\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

3．已知集合$A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，$B=\{1,m\}$，则“$m=3$”是“$A\cup B=A$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．在$\triangle ABC$中，$BD=2DC$，$AE=ED$，则$BE=$（　）



A．$-\dfrac{1}{3}AC+\dfrac{5}{6}AB$　　B．$\dfrac{1}{3}AC-\dfrac{5}{6}AB$

C．$-\dfrac{1}{3}AC+\dfrac{1}{6}AB$　　D．$\dfrac{1}{3}AC-\dfrac{1}{6}AB$

5．在圆台O_1O_2中，圆O_2的半径是圆O_1半径的2倍，且点O_2为该圆台外接球球心，则圆台的体积与外接球的体积之比为（）

A．$\dfrac{7\sqrt{3}}{16}$　　B．$\dfrac{7\sqrt{3}}{96}$　　C．$\dfrac{21\sqrt{3}}{32}$　　D．$\dfrac{7\sqrt{3}}{32}$

6．若$a,b,c\in \mathbf{R}$，则下列命题正确的是（　）

A．若$a>b$，则$ac^2>bc^2$　　B．若$\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}$，则$a<b$

C．若$a<b<c<0$，则$\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$　　　　D．若$a>b$，则$a^2>b^2$

7．已知函数$f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ -x+3, x>1 \end{cases}$，则$f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$的值为（　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

8．抛掷一个质地均匀的骰子的试验，事件A表示“小于5的偶数点出现”，事件B表示“不小于5的点数出现”，则一次试验中，事件A或事件B至少有一个发生的概率为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{5}{6}$

二、多选题（4*3=12分）

9．下列命题中正确的有（　）

A．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，$b\perp c$，则$a//c$

B．若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，$b\perp c$，则$a\perp c$

C．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，a不平行于c，则c一定不垂直于b

D．若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，$b$不垂直于$c$，则$a$一定不垂直于$c$

10．[多选]下列选项正确的是（　）

A．函数$f(x)=(2a^2-3a+2)\cdot a^x$是指数函数，则$a=\frac{1}{2}$

B．函数$f(x)=a^x$的值域为R

C．函数$f(x)=a^{x+1}$的图象可以由$f(x)=a^x$向右平移一个单位得到

D．函数$y=a^{2x+3}-1$恒过定点$\left(-\frac{3}{2},0\right)$

11．已知函数$f(x)=\tan\pi x$，将函数$y=f(x)$的图象向左平移$\frac{1}{3}$个单位长度，然后纵坐标不变，横坐标伸长为原来的2倍，得到函数$g(x)$的图象，则下列描述中正确的是（　）．

A．函数$g(x)$的图象关于点$\left(-\frac{2}{3},0\right)$成中心对称

B．函数$g(x)$的最小正周期为2

C．函数$g(x)$的单调增区间为$\left(-\frac{5}{3}+k,\frac{1}{3}+k\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D．函数$g(x)$的图象没有对称轴

三、填空题（4*3=12分）

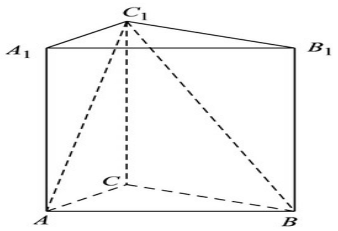
12．若$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$3\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=0$，则$\frac{\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$____．

13．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若$a_{2027}=m$，则$S_{2025}=$_____.

14．已知曲线$y=x^3-2x^2+2x+1$，则曲线过点$P(0,1)$的切线方程为____.

四、解答题（共52分）

15．如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=1$，$\angle ACB=120°$，$AA_1=\sqrt{3}$．(10分)

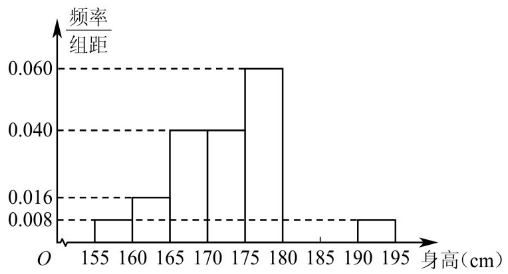


(1)证明：$A_1B_1\parallel$平面ABC_1；

(2)求点C到平面ABC_1的距离.

16．从某学校的800名男生中随机抽取50名测量身高，被测学生身高全部介于155cm和

195cm 之间，将测量结果按如下方式分成八组：第一组$[155,160)$，第二组$[160,165)$，…，第八组$[190,195]$，下图是按上述分组方法得到的频率分布直方图的一部分，已知第一组与第八组人数相同，第六组的人数为 4 人．（9 分）



(1)求第七组的频率；

(2)估计该校的 800 名男生的身高的平均数和中位数；

(3)若从身高属于第六组和第八组的所有男生中随机抽取两名男生，记他们的身高分别为 x，y，事件$E=\{|x-y|\le 5\}$，求$P(E)$．

17．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$过点$(2\sqrt{2},1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$．（10 分）

(1)求双曲线 C 的标准方程；

(2)双曲线 C 在其右支上一点 P 处的切线 l 分别交其两条渐近线l_1，l_2于 A，B 两点，O 为坐标原点，求△OAB 的面积．

18．已知数列$\{a_n\}$满足$a_2=7,a_{n+1}=2a_n+1$，令$b_n=a_n+1,n\in\mathbf{N}^*$．(11 分)

(1)证明：$\{b_n\}$是等比数列，并求数列$\{b_n\}$的通项公式b_n；

(2)令$c_n=(2n+1)b_n,n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

19．已知函数$f(x)=x^2-2a\ln x-1.$ (12 分)

(1)若$a=1$，求$f(x)$的极值；

(2)讨论$f(x)$的单调性；

(3)若$f(x)\geq 0$恒成立，求实数a的取值集合．