

茂名市 2010 年第二次高考模拟考试

数学试卷 (文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分, 共 4 页. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

- 1、答卷前, 考生要务必填写答题卷上的有关项目.
- 2、选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答案填在答题卡相应的位置上.
- 3、非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卷各题目指定区域内的相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.
- 4、考生必须保持答题卷的整洁. 考试结束后, 将答题卷交回.

5、参考公式: $V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h$; $[\ln(x+1)]' = \frac{1}{x+1}$

第一部分 选择题 (共 50 分)

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 + 3x - 4 < 0\}$, $N = \{x | 2x - 1 > 0\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. $(-4, 1)$ B. $(-4, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(1, +\infty)$

2. 若 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\cos \alpha = (\quad)$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. 下面给出的四个点中, 位于 $\begin{cases} x+y-1 < 0 \\ x-y+1 > 0 \end{cases}$ 表示的平面区域内的点是 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(-2, 0)$ C. $(0, -2)$ D. $(2, 0)$

4. 双曲线 $kx^2 - y^2 = 1$ 的一个焦点是 $(\sqrt{2}, 0)$, 那么它的实轴长是 ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

5. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

①若 $\alpha \cap \beta = m, n \parallel \beta, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$; ②若 $\alpha \perp \beta, n \perp \alpha$, 则 $n \parallel \beta$;

③若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$; ④若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$.

其中正确命题的序号是()

- A. ①和② B. ②和③ C. ③和④ D. ①和④

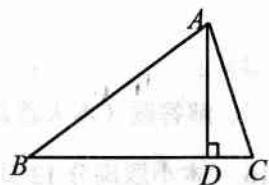
6. 某银行开发出一套网银验证程序, 验证规则如下: (1) 有两组数字, 这两组数字存在一种对应关系: 第一组数字 a, b, c 对应于第二组数字 $2a+b, c+2b, a+3c$; (2) 进行验证时程序在电脑屏幕上依次显示第二组数字, 由用户计算出第一组数字后依次输入电脑, 只有准确输入方能进入, 其流程图如图, 试问用户应输入()

- A. 3, 4, 5 B. 4, 2, 6 C. 2, 6, 4 D. 3, 5, 7 (第6题图)



7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=4$, $\angle ABC=30^\circ$, AD 是边 BC 上的高, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值等于()

- A. 0 B. 4
C. -4 D. 8



8. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x+y=4$, 令 $a = \log_2 x + \log_2 y$, 则有()

- A. $a > 2$ B. $0 < a < 1$ C. $1 < a < 2$ D. $a \leq 2$ (第7题图)

9. 设 $f(x) = x^3 + x$, 则对任意实数 a, b , $a+b \geq 0$ 是 $f(a) + f(b) \geq 0$ 的()

- A. 充分必要条件 B. 充分而非必要条件
C. 必要而非充分条件 D. 既非充分也非必要条件

10. 将正偶数集合 $\{2, 4, 6, \dots\}$ 从小到大按第 n 组有 $2n-1$ 个偶数进行分组,

$\{2\}$, $\{4, 6, 8\}$, $\{10, 12, 14, 16, 18\}$, ...

第一组 第二组 第三组

则 2010 位于第()组.

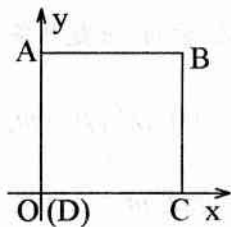
- A. 30 B. 31 C. 32 D. 33

第二部分 非选择题 (共 100 分)

二、填空题: (本大题共 5 小题, 第 14、15 小题任选一道作答, 多选的按第 14 小题给分, 共 20 分)

11. i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $f(z+i) = z-3i$, 则 $f(2i)+1 =$ _____.

12. 如右图所示, 一个水平放置的正方形 $ABCD$, 它在直角坐标系 xOy 中, 点 B 的坐标为 $(2, 2)$, 则在用斜二测画法画出的正方形的直观图 $A'B'C'D'$ 中, 顶点 B' 到 x' 轴的距离为_____.



13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & (x < 0) \\ x^2-2x, & (x \geq 0) \end{cases}$, 方程 $f(x) = k$ 有三个实根, 则 k 的

取值范围是_____.

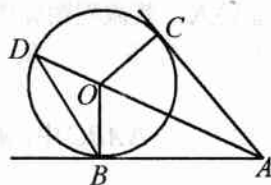
(第 12 题图)

14. (极坐标与参数方程选做题) 已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho = 6 \sin \theta$, 以极点为平面直角

坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = \sqrt{2}t - 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$,

(t 为参数), 则直线 l 与曲线 C 相交所得的弦的弦长为_____.

15. (几何证明选讲选做题) 如图所示, AC 和 AB 分别是圆 O 的切线, 且 $OC = 3$, $AB = 4$, 延长 AO 到 D 点, 则 $\triangle ABD$ 的面积是_____.



(第 15 题图)

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分, 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤)

16. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 4 \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}) + a$ 的最大值为 2.

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的单调增区间.

17. (本小题满分 12 分) 第 16 届亚运会将于 2010 年 11 月 12 日至 27 日在中国广州进行, 为了搞好接待工作, 组委会招募了 16 名男志愿者和 14 名女志愿者. 调查发现, 男、女志愿者中分别有 10 人和 6 人喜爱运动, 其余不喜爱.

	喜爱运动	不喜爱运动	总计
男	10		16
女	6		14
总计			30

(1) 根据以上数据完成右边 2×2 列联表;

(2) 根据列联表的独立性检验, 能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为性别与喜爱运动有关?

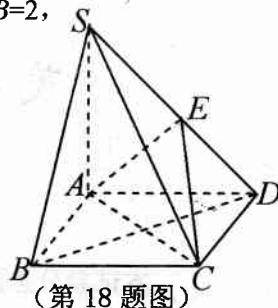
(3) 如果从喜欢运动的女志愿者中 (其中恰有 4 人会外语), 抽取 2 名负责翻译工作, 则抽出的志愿者中 2 人都能胜任翻译工作的概率是多少?

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

参考数据:

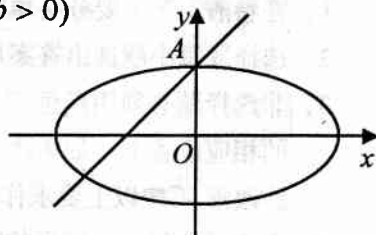
$P(K^2 \geq k_0)$	0.40	0.25	0.10	0.010
k_0	0.708	1.323	2.706	6.635

18. (本题满分 14 分) 如图, 在底面是菱形的四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SA=AB=2$, $SB=SD=2\sqrt{2}$.



- (1) 证明: $BD \perp$ 平面 SAC ;
 (2) 问: 侧棱 SD 上是否存在点 E , 使得 $SB \parallel$ 平面 ACE ? 请证明你的结论;
 (3) 若 $\angle BAD=120^\circ$, 求几何体 $A-SBD$ 的体积.

19. (本小题满分 14 分) 如图所示, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$



的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 且 $A(0, 2)$ 是椭圆 C 的顶点.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 过点 A 作斜率为 1 的直线 l , 设以椭圆 C 的右焦点 F 为抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 若点 M 为抛物线 E 上任一点, 求点 M 到直线 l 距离的最小值.
20. (本小题满分 14 分) 已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f(x) = \ln(x+1) + m - 2f'(1)$, 且函数

$f(x)$ 的图象过点 $(0, -2)$, 函数 $g(x) = \frac{1}{x} + af(x)$, $a, m \in \mathbb{R}$.

- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的表达式;
 (2) 设 $g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线与 y 轴垂直, 求 $g(x)$ 的极值.
21. (本小题满分 14 分)

设 $f(x) = \frac{x}{a(x+2)}$, 方程 $f(x) = x$ 有唯一解, 已知 $f(x_n) = x_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $f(x_1) = \frac{1}{1005}$.

- (1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_n = \frac{4 - 4017x_n}{x_n}$, 且 $b_n = \frac{a_{n+1}^2 + a_n^2}{2a_{n+1}a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 求和 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$;

(3) 问: 是否存在最小整数 m , 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $f(x_n) < \frac{m}{2010}$ 成立, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 说明理由.

茂名市 2010 年第二次高考模拟考试

数学试题参考答案及评分标准（文科）

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	C	B	D	A	B	D	A	C

提示：

9. $f(x)$ 既是奇函数，又在定义域上是单调递增函数，

$a+b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -b \Leftrightarrow f(a) \geq f(-b) \Leftrightarrow f(a)+f(b) \geq 0$ ，所以选 A.

10. 前 n 组共有 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 个偶数，

$\because 2010$ 是第 1005 个偶数， $31^2 < 1005 < 32^2$ ， $\therefore 2010$ 在第 32 组。

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

11. $1-2i$ 12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 13. $-1 < k \leq 0$ 14. 4 15. $\frac{48}{5}$

提示：

13. 作出 $f(x)$ 的图象，当 $-1 < k \leq 0$ 与有三个交点，即 $f(x)=k$ 有三个实根。

15. 过点 D 作 $DE \perp AE$ 交 AB 于点 E ，由 $OB \parallel DE$ 得 $\frac{OB}{DE} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow DE = \frac{3 \times 8}{5} = \frac{24}{5}$

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{48}{5}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤）

16. 解：(1) $f(x) = 4 \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}) + a = 4 \cos x \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x) + a$

$$= 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 + a = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 + a$$

$$= 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1 + a. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore$ 当 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $2+1+a=3+a$ 。又 $f(x)$ 的最大值为 2，

$\therefore 3+a=2$ ，即 $a=-1$ 。 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$6分

(2) 由(1)得 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$7分

$\therefore -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$9分

得 $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 11分

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$12分

17. 解: (1)

	喜爱运动	不喜爱运动	总计
男	10	6	16
女	6	8	14
总计	16	14	30

.....2分

(2) 假设: 是否喜爱运动与性别无关, 由已知数据可求得:

$$K^2 = \frac{30 \times (10 \times 8 - 6 \times 6)^2}{(10+6)(6+8)(10+6)(6+8)} \approx 1.1575 < 2.706$$

因此在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下不能判断喜爱运动与性别有关.6分

(3) 喜欢运动的女志愿者有 6 人, 设分别为 A、B、C、D、E、F, 其中 A、B、C、D 会外语. 则从这 6 人中任取 2 人有 AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF, 共 15 种取法. 其中两人都会外语的有 AB, AC, AD, BC, BD, CD, 共 6 种.

故抽出的志愿者中 2 人都能胜任翻译工作的概率是 $P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$12分

18. 解: (1) $\because$ 四棱锥 S-ABCD 底面是菱形, $\therefore BD \perp AC$ 且 $AD=AB$.

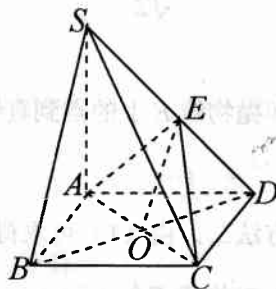
又 $SA=AB=2, SB=SD=2\sqrt{2}$.

$$\therefore SA^2 + AB^2 = SB^2, SA^2 + AD^2 = SD^2,$$

$$\therefore SA \perp AB, SA \perp AD, \text{ 又 } AB \cap AD = A, \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore SA \perp \text{平面 } ABCD, BD \subset \text{平面 } ABCD, \text{ 从而 } SA \perp BD. \dots \dots \dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } SA \cap AC = A, \therefore BD \perp \text{平面 } SAC. \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$



(2) 在侧棱 SD 上存在点 E, 使得 $SB \parallel \text{平面 } ACE$, 其中 E 为 SD 的中点.6分

证明如下: 设 $BD \cap AC = O$, 则 O 为 BD 的中点.

又 E 为 SD 的中点, 连接 OE, 则 OE 为 $\triangle SBD$ 的中位线.7分

$\therefore OE \parallel SB$, 又 $OE \subset$ 平面 AEC , $SB \not\subset$ 平面 AEC8 分
 $\therefore SB \parallel$ 平面 ACE10 分

(3) 当 $\angle BAD = 120^\circ$ 时, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,12 分

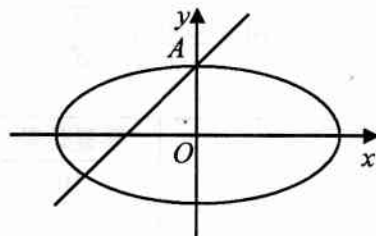
$\therefore$ 几何体 $A-SBD$ 的体积为

$$V_{A-SBD} = V_{S-ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SA = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 由题意可知, $b = 2$1 分

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{即 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - 4}{a^2} = \frac{1}{5}, \therefore a^2 = 5. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$



$\therefore$ 所以椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$5 分

(2) 方法一: 由 (1) 可求得椭圆 C 的右焦点坐标为 $F(1, 0)$,6 分

$\therefore$ 抛物线 E 的方程为: $y^2 = 4x$, 而直线 l 的方程为: $x - y + 2 = 0$.

设动点 M 为 $(\frac{y_0^2}{4}, y_0)$, 则点 M 到直线 l 的距离为8 分

$$d = \frac{|\frac{y_0^2}{4} - y_0 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{4}(y_0 - 2)^2 + 1|}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

即抛物线 E 上的点到直线 l 距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$14 分

方法二: 由 (1) 可求得椭圆 C 的右焦点坐标为 $F(1, 0)$,6 分

$\therefore$ 抛物线 E 的方程为: $y^2 = 4x$, 而直线 l 的方程为: $x - y + 2 = 0$.

可设与直线 l 平行且与抛物线 E 相切的直线 l' 方程为: $x - y + c = 0$8 分

由 $\begin{cases} x-y+c=0 \\ y^2=4x \end{cases}$, 可得: $x^2+(2c-4)x+c^2=0$9 分

$\therefore \Delta = (2c-4)^2 - 4c^2 = 0$, 解得: $c=1$, $\therefore$ 直线 l' 方程为: $x-y+1=0$11 分

$\therefore$ 抛物线上的点到直线 l 的距离的最小值等于直线 l 与 l' 的距离: $d = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$13 分

即抛物线 E 上的点到直线 l 距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$14 分

20. 解: (1) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $\therefore f'(1) = \frac{1}{2}$2 分

又 $f(0) = -2$,

$\therefore \ln 1 + m - 2 \times \frac{1}{2} = -2$4 分

$\therefore m = -1$5 分

$\therefore f(x) = \ln(x+1) - 2$6 分

(2) $\because g(x) = \frac{1}{x} + a \ln(x+1) - 2a$, $\therefore g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x+1} = \frac{ax^2 - x - 1}{(x+1) \cdot x^2}$8 分

又 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$,

由 $g'(1) = \frac{a-2}{2} = 0$, 得 $a = 2$,10 分

$\therefore g(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln(x+1) - 4$, $\therefore g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{(x+1) \cdot x^2} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1) \cdot x^2}$.

由 $g'(x) > 0$, 解得 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1$;

由 $g'(x) < 0$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < 1$, 且 $x \neq 0$12 分

则 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-1, -\frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$.

故 $g(x)$ 极大值为 $g(-\frac{1}{2}) = -2 + 2 \ln(-\frac{1}{2} + 1) - 4 = -6 - 2 \ln 2$,

极小值为 $g(1) = 1 + 2 \ln 2 - 4 = -3 + 2 \ln 2$14 分

21. 解: (1) 因方程 $f(x)=x$ 有唯一解, 可求 $a=\frac{1}{2}$ 从而得到 $f(x)=\frac{2x}{x+2}$.

$$f(x_1)=\frac{1}{1005}, \text{ 即 } \frac{2x_1}{x_1+2}=\frac{1}{1005}, \therefore x_1=\frac{2}{2009},$$

$$\text{又由已知 } f(x_n)=x_{n+1}; \therefore \frac{2x_n}{x_n+2}=x_{n+1}, x_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}.$$

数列 $\{\frac{1}{x_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{x_1}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,4 分

$$\text{故 } \frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+(n-1) \cdot \frac{1}{2}=\frac{2+(n-1)x_1}{2x_1}.$$

所以数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n=\frac{2x_1}{(n-1)x_1+2}=\frac{2}{n+2008}$6 分

$$(2) \text{ 将 } x_n \text{ 代入 } a_n \text{ 可求得 } a_n=\frac{4-4017 \times \frac{2}{n+2008}}{\frac{2}{n+2008}}=2n-1,$$

$$\therefore b_n=\frac{a_{n+1}^2+a_n^2}{2a_{n+1}a_n}=\frac{(2n+1)^2+(2n-1)^2}{2(2n+1)(2n-1)}=1+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}).$$

$$\therefore S_n=n+(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=n+1-\frac{1}{2n+1}. \text{10 分}$$

$$(3) \because f(x_n)=x_{n+1}<\frac{m}{2010} \text{ 对 } n \in N^* \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore \text{只要 } \frac{m}{2010}>(\frac{2}{n+2009})_{\max} \text{ 即可, 而 } (\frac{2}{n+2009})_{\max}=\frac{1}{1+2009}=\frac{1}{2010}. \text{12 分}$$

$$\text{即要 } \frac{m}{2010}>\frac{1}{2010}, \therefore m>1, \text{ 故存在最小的正整数 } m=2. \text{14 分}$$