2021年普通高等学校招生全国统一考试
数学

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名. 考生号. 考场号和座位号填写在答题卡上.用2*B*铅笔将试卷类型(*A*)填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑：如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案.答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一. 选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

【. 案】B

【解析】

【分析】利用交集的定义可求 $A\cap B$.

【详解】由题设有 $A\cap B=\{2,3\}$，

故选：B .

2. 已知 $z=2-\mathrm{i}$，则 $z(\overline{z}+\mathrm{i})=$（　　）

A. $6-2\mathrm{i}$　　B. $4-2\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $4+2\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数的乘法和共轭复数的定义可求得结果.

【详解】因为 $z=2-i$，故 $\overline{z}=2+i$，故 $z(\overline{z}+i)=(2-i)(2+2i)=6+2i$

故选：C.

3. 已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆锥的母线长为l，根据圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长可求得l的值，即为所求.

【详解】设圆锥的母线长为l，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则$\pi l = 2\pi \times \sqrt{2}$，解得$l = 2\sqrt{2}$.

故选：B.

4．下列区间中，函数$f\left(x\right)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$单调递增的区间是（　　）

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　C. $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】解不等式$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x-\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，利用赋值法可得出结论.

【详解】因为函数$y=\sin x$的单调递增区间为$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(k\in Z\right)$，

对于函数$f\left(x\right)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x-\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，

解得$2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\left(k\in Z\right)$，

取$k=0$，可得函数$f\left(x\right)$的一个单调递增区间为$\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

则$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\subseteq\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\not\subset\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，A选项满足条件，B不满足条件；

取$k=1$，可得函数$f\left(x\right)$的一个单调递增区间为$\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$，

$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\not\subset\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$且$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\not\subset\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)\not\subset\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$，CD选项均不满足条件.

故选：A.

【点睛】方法点睛：求较为复杂的三角函数的单调区间时，首先化简成$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$形式，再求$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$的单调区间，只需把$\omega x+\varphi$看作一个整体代入$y=\sin x$的相应单调区间内即可，注意要先把$\omega$化为正数.

5．已知F_1，F_2是椭圆C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$M$在$C$上，则$\left|MF_1\right|\cdot\left|MF_2\right|$的最大值为（　　）

A．13　　B．12　　C．9　　D．6

【答案】C

【解析】

【分析】本题通过利用椭圆定义得到$\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a=6$，借助基本不等式$\left|MF_1\right|\cdot\left|MF_2\right|\le\left(\frac{\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|}{2}\right)^2$即可得到答案.

【详解】由题，$a^2=9,b^2=4$，则$\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a=6$，

所以$\left|MF_1\right|\cdot\left|MF_2\right|\le\left(\frac{\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|}{2}\right)^2=9$（当且仅当$\left|MF_1\right|=\left|MF_2\right|=3$时，等号成立）.

故选：C.

【点睛】本题关键在于正确理解能够想到求最值的方法，即通过基本不等式放缩得到.

6. 若$\tan\theta=-2$，则$\frac{\sin\theta\left(1+\sin2\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{6}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】将式子进行齐次化处理，代入$\tan\theta=-2$即可得到结果.

【详解】将式子进行齐次化处理得：

$$\frac{\sin\theta\left(1+\sin2\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta\left(\sin\theta+\cos\theta\right)$$

$$=\frac{\sin\theta\left(\sin\theta+\cos\theta\right)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4-2}{1+4}=\frac{2}{5}.$$

故选：C.

【点睛】易错点睛：本题如果利用$\tan\theta=-2$，求出$\sin\theta,\cos\theta$的值，可能还需要分象限讨论其正负，通过齐次化处理，可以避开了这一讨论.

7. 若过点$\left(a,b\right)$可以作曲线$y=\mathrm{e}^x$的两条切线，则（　　）

A. $\mathrm{e}^b<a$　　B. $\mathrm{e}^a<b$

C. $0<a<\mathrm{e}^b$　　D. $0<b<\mathrm{e}^a$

【答案】D

【解析】

【分析】根据导数几何意义求得切线方程，再构造函数，利用导数研究函数图象，结合图形确定结果

【详解】在曲线$y=e^x$上任取一点$P\left(t,e^t\right)$，对函数$y=e^x$求导得$y'=\mathrm{e}^x$，

所以，曲线$y=e^x$在点P处的切线方程为$y-e^t=e^t\left(x-t\right)$，即$y=e^tx+\left(1-t\right)e^t$，

由题意可知，点$\left(a,b\right)$在直线$y=e^tx+\left(1-t\right)e^t$上，可得$b=ae^t+\left(1-t\right)e^t=\left(a+1-t\right)e^t$，

令 $f(t)=(a+1-t)e^t$，则 $f'(t)=(a-t)e^t$.

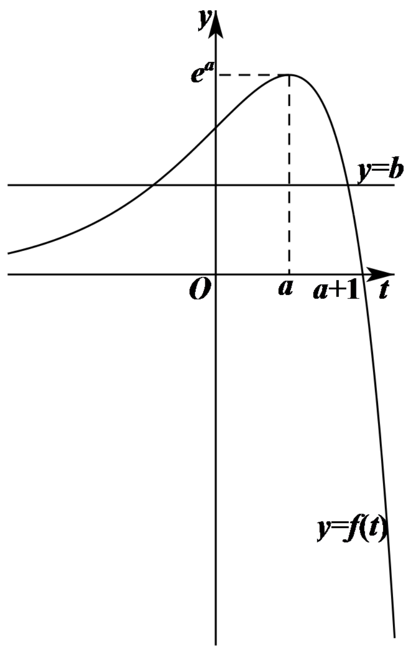
当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，此时函数 $f(t)$ 单调递增，

当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，此时函数 $f(t)$ 单调递减，

所以，$f(t)_{\max}=f(a)=e^a$，

由题意可知，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点，则 $b<f(t)_{\max}=e^a$，

当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$，作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示：



由图可知，当 $0<b<e^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点.

故选：D.

【点睛】数形结合是解决数学问题常用且有效的方法

8．有6个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取1个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是7”，则（　　）

A．甲与丙相互独立　　　　B．甲与丁相互独立

C．乙与丙相互独立　　　　D．丙与丁相互独立

【答案】B

【解析】

【分析】根据独立事件概率关系逐一判断

【详解】$P(甲)=\frac{1}{6}$，$P(乙)=\frac{1}{6}$，$P(丙)=\frac{5}{36}$，$P(丁)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，，

$P(甲丙)=0\neq P(甲)P(丙)$，$P(甲丁)=\frac{1}{36}=P(甲)P(丁)$，

$P(乙丙)=\frac{1}{36}\neq P(乙)P(丙)$，$P(丙丁)=0\neq P(丁)P(丙)$，

故选：B

【点睛】判断事件A,B是否独立，先计算对应概率，再判断$P(A)P(B)=P(AB)$是否成立

二. 选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 有一组样本数据x_1，x_2，…，x_n，由这组数据得到新样本数据y_1，y_2，…，y_n，其中$y_i=x_i+c$($i=1,2,\cdots,n),c$为非零常数，则（　　）

A．两组样本数据的样本平均数相同

B．两组样本数据的样本中位数相同

C．两组样本数据的样本标准差相同

D．两组样数据的样本极差相同

【答案】CD

【解析】

【分析】A、C利用两组数据的线性关系有$E(y)=E(x)+c$、$D(y)=D(x)$，即可判断正误；根据中位数、极差的定义，结合已知线性关系可判断B、D的正误.

【详解】A：$E(y)=E(x+c)=E(x)+c$且$c\neq 0$，故平均数不相同，错误；

B：若第一组中位数为x_i，则第二组的中位数为$y_i=x_i+c$，显然不相同，错误；

C：$D(y)=D(x)+D(c)=D(x)$，故方差相同，正确；

D：由极差的定义知：若第一组的极差为$x_{\max}-x_{\min}$，则第二组的极差为

$y_{\max}-y_{\min}=(x_{\max}+c)-(x_{\min}+c)=x_{\max}-x_{\min}$，故极差相同，正确；

故选：CD

10. 已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　　）

A. $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

【答案】AC

【解析】

【分析】A、B写出$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{AP_1}$，$\overrightarrow{AP_2}$的坐标，利用坐标公式求模，即可判断正误；C、D根据向量

的坐标，应用向量数量积的坐标表示及两角和差公式化简，即可判断正误.

【详解】A: $\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,-\sin\beta)$，所以$|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，$|\overrightarrow{OP_2}|=\sqrt{(\cos\beta)^2+(-\sin\beta)^2}=1$，故$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$，正确；

B：$\overrightarrow{AP_1}=(\cos\alpha-1,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{AP_2}=(\cos\beta-1,-\sin\beta)$，所以

$|\overrightarrow{AP_1}|=\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=2|\sin\frac{\alpha}{2}|$

，同理$|\overrightarrow{AP_2}|=\sqrt{(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta}=2|\sin\frac{\beta}{2}|$，故$|\overrightarrow{AP_1}|,|\overrightarrow{AP_2}|$不一定相等，错误；

C：由题意得：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=1\times\cos(\alpha+\beta)+0\times\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot(-\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，正确；

D：由题意得：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=1\times\cos\alpha+0\times\sin\alpha=\cos\alpha$，

$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\cos\beta\times\cos(\alpha+\beta)+(-\sin\beta)\times\sin(\alpha+\beta)$

$=\cos\alpha\cos^2\beta-\sin\alpha\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cos\beta-\cos\alpha\sin^2\beta$

$=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta=\cos(\alpha+2\beta)$，错误；

故选：AC

11. 已知点 P 在圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$上，点$A(4,0)$、$B(0,2)$，则（　　）

A. 点 P 到直线 AB 的距离小于10

B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C. 当$\angle PBA$最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$

D. 当$\angle PBA$最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】计算出圆心到直线 AB 的距离，可得出点 P 到直线 AB 的距离的取值范围，可判断AB选项的正误；分析可知，当$\angle PBA$最大或最小时，PB 与圆 M 相切，利用勾股定理可判断CD选项的正误.

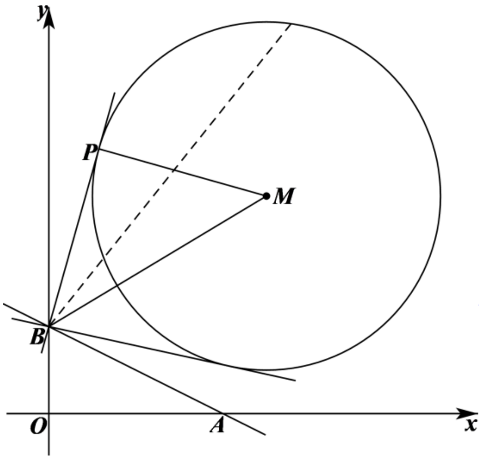
【详解】圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$的圆心为$M(5,5)$，半径为4，

直线 AB 的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即$x+2y-4=0$，

圆心 M 到直线 AB 的距离为$\frac{|5+2\times5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}>4$，

所以，点 P 到直线 AB 的距离的最小值为$\frac{11\sqrt{5}}{5}-4<2$，最大值为$\frac{11\sqrt{5}}{5}+4<10$，A选项正确，B选项错误；

如下图所示：



当$\angle PBA$最大或最小时，PB与圆M相切，连接MP、BM，可知$PM\perp PB$，

$|BM|=\sqrt{(0-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{34}$，$|MP|=4$，由勾股定理可得$|BP|=\sqrt{|BM|^2-|MP|^2}=3\sqrt{2}$，CD选项正确.

故选：ACD.

【点睛】结论点睛：若直线l与半径为r 圆C相离，圆心C到直线l的距离为d，则圆C上一点P到直线l的距离的取值范围是$[d-r,d+r]$.

12. 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=1$，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

A. 当$\lambda=1$时，$\triangle AB_1P$的周长为定值

B. 当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积为定值

C. 当$\lambda=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1P\perp BP$

D. 当$\mu=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1B\perp$平面AB_1P

【答案】BD

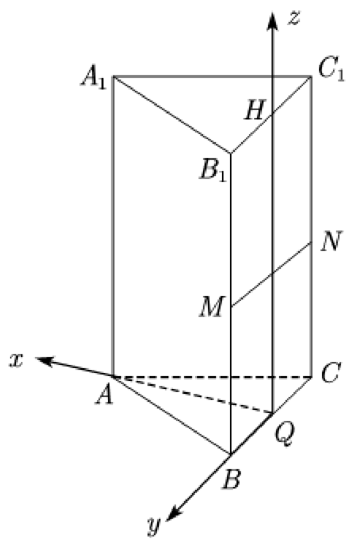
【解析】

【分析】对于A，由于等价向量关系，联系到一个三角形内，进而确定点的坐标；

对于B，将P点的运动轨迹考虑到一个三角形内，确定路线，进而考虑体积是否为定值；

对于C，考虑借助向量 平移将P点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解P点的个数；

对于D，考虑借助向量的平移将P点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解P点的个数.



【详解】

易知，点P在矩形BCC_1B_1内部（含边界）.

对于A，当$\lambda=1$时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{CC_1}$，即此时$P\in$线段$CC_1$，$\triangle AB_1P$周长不是定值，故A错误；

对于B，当$\mu=1$时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$，故此时$P$点轨迹为线段$B_1C_1$，而$B_1C_1//BC$，$B_1C_1//$平面$A_1BC$，则有$P$到平面$A_1BC$的距离为定值，所以其体积为定值，故B正确.

对于C，当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，取$BC$，$B_1C_1$中点分别为$Q$，$H$，则$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BQ}+\mu\overrightarrow{QH}$，所以$P$点轨迹为线段$QH$，不妨建系解决，建立空间直角坐标系如图，$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$，$P\left(0,0,\mu\right)$，$B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，则$\overrightarrow{A_1P}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\mu-1\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(0,-\frac{1}{2},\mu\right)$，$\mu\left(\mu-1\right)=0$，所以$\mu=0$或$\mu=1$．故$H,Q$均满足，故C错误；

对于D，当$\mu=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，取$BB_1$，$CC_1$中点为$M,N$．$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BM}+\lambda\overrightarrow{MN}$，所以$P$点轨迹为线段$MN$．设$P\left(0,y_0,\frac{1}{2}\right)$，因为$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，所以$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},y_0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1B}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，所以$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2}=0\Rightarrow y_0=-\frac{1}{2}$，此时$P$与$N$重合，故D正确.

故选：BD.

【点睛】本题主要考查向量的等价替换，关键之处在于所求点的坐标放在三角形内.

三. 填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知函数$f\left(x\right)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$是偶函数，则$a=$______.

【答案】1

【解析】

【分析】利用偶函数的定义可求参数a的值.

【详解】因为$f\left(x\right)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$，故$f\left(-x\right)=-x^3\left(a\cdot 2^{-x}-2^x\right)$，

因为$f\left(x\right)$为偶函数，故$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

时$x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)=-x^3\left(a\cdot 2^{-x}-2^x\right)$，整理得到$\left(a-1\right)\left(2^x+2^{-x}\right)=0$，

故$a=1$，

故答案为：1

14．已知O为坐标原点，抛物线C：$y^2=2px$($p>0$)的焦点为F，P为C上一点，PF与x轴垂直，Q为x轴上一点，且$PQ\perp OP$，若$\left|FQ\right|=6$，则C的准线方程为______.

【答案】$x=-\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】先用坐标表示P，Q，再根据向量垂直坐标表示列方程，解得p，即得结果.

【详解】不妨设$P(\dfrac{p}{2},p)\therefore Q(6+\dfrac{p}{2},0),\overrightarrow{PQ}=(6,-p)$

因为$PQ\perp OP$，所以$\dfrac{p}{2}\times 6-p^2=0\because p>0\therefore p=3\therefore$ C的准线方程为$x=-\dfrac{3}{2}$

故答案为：$x=-\dfrac{3}{2}$

【点睛】利用向量数量积处理垂直关系是本题关键.

15．函数$f\left(x\right)=\left|2x-1\right|-2\ln x$的最小值为______.

【答案】1

【解析】

【分析】由解析式知$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，讨论$0<x\le\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{2}<x\le 1$、$x>1$，并结合导数研究的单调性，即可求$f(x)$最小值.

【详解】由题设知：$f(x)=|2x-1|-2\ln x$定义域为$(0,+\infty)$，

$\therefore$当$0<x\le\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=1-2x-2\ln x$，此时$f(x)$单调递减；

当$\dfrac{1}{2}<x\le 1$时，$f(x)=2x-1-2\ln x$，有$f'(x)=2-\dfrac{2}{x}\le 0$，此时$f(x)$单调递减；

当$x>1$时，$f(x)=2x-1-2\ln x$，有$f'(x)=2-\dfrac{2}{x}>0$，此时$f(x)$单调递增；

又 $f(x)$ 在各分段的界点处连续，

∴综上有：$0<x\le 1$时，$f(x)$ 单调递减，$x>1$时，$f(x)$ 单调递增；

∴ $f(x)\ge f(1)=1$

故答案为：1.

16．某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为 $20\mathrm{dm}\times 12\mathrm{dm}$ 的长方形纸，对折1次共可以得到$10\mathrm{dm}\times 12\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times 6\mathrm{dm}$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\mathrm{dm}^2$，对折2次共可以得到$5\mathrm{dm}\times 12\mathrm{dm}$，$10\mathrm{dm}\times 6\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times 3\mathrm{dm}$三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\mathrm{dm}^2$，以此类推，则对折4次共可以得到不同规格图形的种数为______；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$ ______dm^2.

【答案】　(1). 5　(2). $720-\dfrac{15(3+n)}{2^{n-4}}$

【解析】

【分析】（1）按对折列举即可；（2）根据规律可得 S_n，再根据错位相减法得结果.

【详解】（1）对折 4 次可得到如下规格：$\dfrac{5}{4}dm\times 12dm$，$\dfrac{5}{2}dm\times 6dm$，$5dm\times 3dm$，$10dm\times\dfrac{3}{2}dm$，$20dm\times\dfrac{3}{4}dm$，共 5 种；

（2）由题意可得 $S_1=2\times 120$，$S_2=3\times 60$，$S_3=4\times 30$，$S_4=5\times 15$，…，$S_n=\dfrac{120(n+1)}{2^{n-1}}$，

设 $S=\dfrac{120\times 2}{2^0}+\dfrac{120\times 3}{2^1}+\dfrac{120\times 4}{2^2}+\cdots+\dfrac{120(n+1)}{2^{n-1}}$，

则 $\dfrac{1}{2}S=\dfrac{120\times 2}{2^1}+\dfrac{120\times 3}{2^2}+\cdots+\dfrac{120n}{2^{n-1}}+\dfrac{120(n+1)}{2^n}$，

两式作差得

$$\frac{1}{2}S=240+120\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{120(n+1)}{2^n}=240+\frac{60\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{120(n+1)}{2^n}$$

$=360-\dfrac{120}{2^{n-1}}-\dfrac{120(n+1)}{2^n}=360-\dfrac{120(n+3)}{2^n}$，

因此，$S=720-\dfrac{240(n+3)}{2^n}=720-\dfrac{15(n+3)}{2^{n-4}}$.

故答案为：5；$720-\dfrac{15(n+3)}{2^{n-4}}$.

【点睛】方法点睛：数列求和　常用方法：

（1）对于等差等比数列，利用公式法可直接求解；

（2）对于$\{a_nb_n\}$结构，其中$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，用错位相减法求和；

（3）对于$\{a_n+b_n\}$结构，利用分组求和法；

（4）对于$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$结构，其中$\{a_n\}$是等差数列，公差为$d(d\neq 0)$，则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，利用裂项相消法求和.

四. 解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明. 证明过程或演算步骤.

17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n为奇数,\\ a_n+2, n为偶数.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前20项和.

【答案】（1）$b_1=2, b_2=5$；（2）300.

【解析】

【分析】（1）根据题设中的递推关系可得$b_{n+1}=b_n+3$，从而可求$\{b_n\}$的通项.

（2）根据题设中的递推关系可得$\{a_n\}$的前20项和为S_{20}可化为$S_{20}=2(b_1+b_2+\cdots+b_9+b_{10})-10$，利用（1）的结果可求$S_{20}$.

【详解】（1）由题设可得$b_1=a_2=a_1+1=2, b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$

又$a_{2k+2}=a_{2k+1}+1$，$a_{2k+1}=a_{2k}+2$，

故$a_{2k+2}=a_{2k}+3$即$b_{n+1}=b_n+3$即$b_{n+1}-b_n=3$

所以$\{b_n\}$为等差数列，故$b_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$.

（2）设$\{a_n\}$的前20项和为S_{20}，则$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$，

因为$a_1=a_2-1, a_3=a_4-1, \cdots, a_{19}=a_{20}-1$，

所以$S_{20}=2(a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20})-10$

$$=2(b_1+b_2+\cdots+b_9+b_{10})-10=2\times\left(10\times 2+\frac{9\times 10}{2}\times 3\right)-10=300$$.

【点睛】方法点睛：对于数列的交叉递推关系，我们一般利用已知的关系得到奇数项的递推关系或偶数项的递推关系，再结合已知数列的通项公式、求和公式等来求解问题.

18. 某学校组织“一带一路”知识竞赛，有A，B两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束：若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束.A类问题中的每个问题回答正确得20分，否则得0分：B类问题中的每个问题回答正确得80分，否则得0分，已知小明能正确回答A类问题的概率为0.8，能正确回

答B类问题的概率为0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答A类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

【答案】（1）见解析；（2）B 类.

【解析】

【分析】（1）通过题意分析出小明累计得分 X 的所有可能取值，逐一求概率列分布列即可. （2）与（1）类似，找出先回答 B 类问题的数学期望，比较两个期望的大小即可.

【详解】（1）由题可知，X 的所有可能取值为0，20，100.

$P\left(X=0\right)=1-0.8=0.2$；

$P\left(X=20\right)=0.8\left(1-0.6\right)=0.32$；

$P\left(X=100\right)=0.8\times0.6=0.48$.

所以 X 的分布列为

（2）由（1）知，$E\left(X\right)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$.

若小明先回答 B 问题，记 Y 为小明的累计得分，则 Y 的所有可能取值为 0，80，100.

$P\left(Y=0\right)=1-0.6=0.4$；

$P\left(Y=80\right)=0.6\left(1-0.8\right)=0.12$；

$P\left(X=100\right)=0.8\times0.6=0.48$.

所以 $E\left(Y\right)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$.

因为 $54.4<57.6$，所以小明应选择先回答 B 类问题.

19. 记$\triangle ABC$是内角A，B，C 的对边分别为 a，b，c.已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

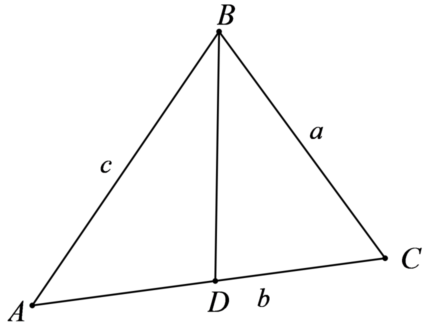
（2）若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$

【答案】（1）证明见解析；（2）$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$.

【解析】

【分析】（1）根据正弦定理的边角关系有 $BD=\dfrac{ac}{b}$，结合已知即可证结论.

（2）由题设 $BD=b, AD=\frac{2b}{3}, DC=\frac{b}{3}$，应用余弦定理求 $\cos\angle ADB$ 、$\cos\angle CDB$，又 $\angle ADB=\pi-\angle CDB$，可得 $2a^2+\frac{b^4}{a^2}=\frac{11b^2}{3}$，结合已知及余弦定理即可求 $\cos\angle ABC$.



【详解】

（1）由题设，$BD=\frac{a\sin C}{\sin\angle ABC}$，由正弦定理知：$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin\angle ABC}$，即 $\frac{\sin C}{\sin\angle ABC}=\frac{c}{b}$，

∴ $BD=\frac{ac}{b}$，又 $b^2=ac$，

∴ $BD=b$，得证.

（2）由题意知：$BD=b, AD=\frac{2b}{3}, DC=\frac{b}{3}$，

∴ $\cos\angle ADB=\frac{b^2+\frac{4b^2}{9}-c^2}{2b\cdot\frac{2b}{3}}=\frac{\frac{13b^2}{9}-c^2}{\frac{4b^2}{3}}$，同理 $\cos\angle CDB=\frac{b^2+\frac{b^2}{9}-a^2}{2b\cdot\frac{b}{3}}=\frac{\frac{10b^2}{9}-a^2}{\frac{2b^2}{3}}$，

∵ $\angle ADB=\pi-\angle CDB$，

∴ $\frac{\frac{13b^2}{9}-c^2}{\frac{4b^2}{3}}=\frac{a^2-\frac{10b^2}{9}}{\frac{2b^2}{3}}$，整理得 $2a^2+c^2=\frac{11b^2}{3}$，又 $b^2=ac$，

∴ $2a^2+\frac{b^4}{a^2}=\frac{11b^2}{3}$，整理得 $6a^4-11a^2b^2+3b^4=0$，解得 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{2}$，

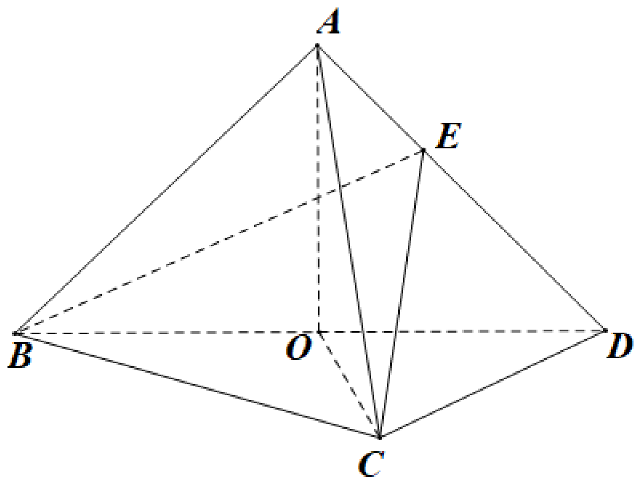
由余弦定理知：$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4}{3}-\frac{a^2}{2b^2}$，

当 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{3}$ 时，$\cos\angle ABC=\frac{7}{6}>1$ 不合题意；当 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{2}$ 时，$\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$；

综上，$\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

【点睛】关键点点睛：第二问，根据余弦定理及 $\angle ADB=\pi-\angle CDB$ 得到 a,b,c 的数量关系，结合已知条件及余弦定理求 $\cos\angle ABC$.

20．如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.



（1）证明：$OA\perp CD$；

（2）若$\triangle OCD$是边长为1的等边三角形，点E在棱AD上，$DE=2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为$45°$，求三棱锥$A-BCD$的体积.

【答案】(1)详见解析(2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【解析】

【分析】（1）根据面面垂直性质定理得AO⊥平面BCD，即可证得结果；

（2）先作出二面角平面角，再求得高，最后根据体积公式得结果.

【详解】（1）因为AB=AD,O为BD中点，所以AO⊥BD

因为平面ABD$\cap$平面BCD $=BD$,平面ABD⊥平面BCD，$AO\subset$平面ABD,

因此AO⊥平面BCD,

因为$CD\subset$平面BCD，所以AO⊥CD

(2)作EF⊥BD于F, 作FM⊥BC于M,连FM

因为AO⊥平面BCD，所以AO⊥BD, AO⊥CD

所以EF⊥BD, EF⊥CD, $BD\cap CD=D$,因此EF⊥平面BCD，即EF⊥BC

因为FM⊥BC，$FM\cap EF=F$,所以BC⊥平面EFM，即BC⊥MF

则$\angle EMF$为二面角E-BC-D的平面角, $\angle EMF=\frac{\pi}{4}$

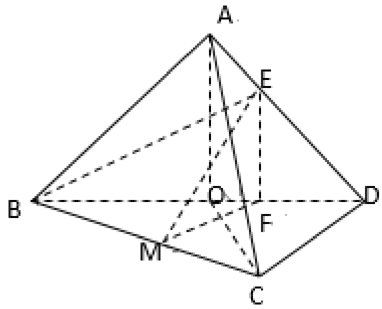
因为$BO=OD$,$\triangle OCD$为正三角形,所以$\triangle OCD$为直角三角形

因为$BE=2ED$, $\therefore FM=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$

从而EF=FM=$\frac{2}{3}\therefore AO=1$

$\because AO\perp$平面BCD,

所以 $V=\frac{1}{3}AO\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$



【点睛】二面角的求法：一是定义法，二是三垂线定理法，三是垂面法，四是投影法.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{17},0\right)$，$|MF_1|-|MF_2|=2$，点 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

（2）设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A、B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

【答案】（1）$x^2-\frac{y^2}{16}=1\left(x\ge1\right)$；（2）$0$.

【解析】

【分析】（1）利用双曲线的定义可知轨迹 C 是以点 F_1、F_2 为左、右焦点双曲线的右支，求出 a、b 的值，即可得出轨迹 C 的方程；

（2）设点 $T\left(\frac{1}{2},t\right)$，设直线 AB 的方程为 $y-t=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$，设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，联立直线 AB 与曲线 C 的方程，列出韦达定理，求出 $|TA|\cdot|TB|$ 的表达式，设直线 PQ 的斜率为 k_2，同理可得出 $|TP|\cdot|TQ|$ 的表达式，由 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$ 化简可得 k_1+k_2 的值.

【详解】因为 $|MF_1|-|MF_2|=2<|F_1F_2|=2\sqrt{17}$，

所以，轨迹 C 是以点 F_1、F_2 为左、右焦点的双曲线的右支，

设轨迹 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，则 $2a=2$，可得 $a=1$，$b=\sqrt{17-a^2}=4$，

所以，轨迹 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1\left(x\ge1\right)$；

（2）设点 $T\left(\frac{1}{2},t\right)$，若过点 T 的直线的斜率不存在，此时该直线与曲线 C 无公共点，

不妨直线 AB 的方程为 $y-t=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $y=k_1x+t-\frac{1}{2}k_1$，

联立 $\begin{cases} y=k_1x+t-\frac{1}{2}k_1 \\ 16x^2-y^2=16 \end{cases}$，消去 y 并整理可得 $\left(k_1^2-16\right)x^2+k_1\left(2t-k_1\right)x+\left(t-\frac{1}{2}k_1\right)^2+16=0$，

设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1>\frac{1}{2}$ 且 $x_2>\frac{1}{2}$.

由韦达定理可得 $x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1t}{k_1^2-16}$，$x_1x_2=\frac{\left(t-\frac{1}{2}k_1\right)^2+16}{k_1^2-16}$，

所以，$|TA|\cdot|TB|=\left(1+k_1^2\right)\cdot\left|x_1-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|x_2-\frac{1}{2}\right|=\left(1+k_1^2\right)\cdot\left(x_1x_2-\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_1^2\right)}{k_1^2-16}$，

设直线 PQ 的斜率为 k_2，同理可得 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_2^2\right)}{k_2^2-16}$，

因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，即 $\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_1^2\right)}{k_1^2-16}=\frac{\left(t^2+12\right)\left(1+k_2^2\right)}{k_2^2-16}$，整理可得 $k_1^2=k_2^2$，

即 $\left(k_1-k_2\right)\left(k_1+k_2\right)=0$，显然 $k_1-k_2\neq 0$，故 $k_1+k_2=0$.

因此，直线 AB 与直线 PQ 的斜率之和为 0.

【点睛】方法点睛：求定值问题常见的方法有两种：

（1）从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

（2）直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

22．已知函数 $f\left(x\right)=x\left(1-\ln x\right)$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

【答案】（1）$f\left(x\right)$ 的递增区间为 $\left(0,1\right)$，递减区间为 $\left(1,+\infty\right)$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）求出函数的导数，判断其符号可得函数的单调区间；

（2）设 $\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$，原不等式等价于 $2<x_1+x_2<e$，前者可构建新函数，利用极值点偏移可证，后者可设 $x_2=tx_1$，从而把 $x_1+x_2<e$ 转化为 $\left(t-1\right)\ln\left(t+1\right)-t\ln t<0$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上的恒成立问题，利用导数可证明该结论成立.

【详解】（1）函数的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

又 $f'\left(x\right)=1-\ln x-1=-\ln x$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

故 $f\left(x\right)$ 的递增区间为 $\left(0,1\right)$，递减区间为 $\left(1,+\infty\right)$.

（2）因为 $b\ln a-a\ln b=a-b$，故 $b\left(\ln a+1\right)=a\left(\ln b+1\right)$，即 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，

故 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$，

设 $\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$，由（1）可知不妨设 $0<x_1<1,x_2>1$.

因为 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$f\left(x\right)=x\left(1-\ln x\right)>0$，$x\in\left(e,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)=x\left(1-\ln x\right)<0$，

故 $1<x_2<e$.

先证：$x_1+x_2>2$，

若 $x_2\geq 2$，$x_1+x_2>2$ 必成立.

若 $x_2<2$，要证：$x_1+x_2>2$，即证 $x_1>2-x_2$，而 $0<2-x_2<1$，

故即证 $f\left(x_1\right)>f\left(2-x_2\right)$，即证：$f\left(x_2\right)>f\left(2-x_2\right)$，其中 $1<x_2<2$.

设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2-x\right),1<x<2$，

则 $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f'\left(2-x\right)=-\ln x-\ln\left(2-x\right)=-\ln\left[x\left(2-x\right)\right]$，

因为 $1<x<2$，故 $0<x\left(2-x\right)<1$，故 $-\ln x\left(2-x\right)>0$，

所以 $g'\left(x\right)>0$，故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 为增函数，所以 $g\left(x\right)>g\left(1\right)=0$，

故 $f\left(x\right)>f\left(2-x\right)$，即 $f\left(x_2\right)>f\left(2-x_2\right)$ 成立，所以 $x_1+x_2>2$ 成立，

综上，$x_1+x_2>2$ 成立.

设 $x_2=tx_1$，则 $t>1$，

结合 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，$\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$ 可得：$x_1\left(1-\ln x_1\right)=x_2\left(1-\ln x_2\right)$，

即：$1-\ln x_1=t\left(1-\ln t-\ln x_1\right)$，故 $\ln x_1=\frac{t-1-t\ln t}{t-1}$，

要证：$x_1+x_2<e$，即证 $\left(t+1\right)x_1<e$，即证 $\ln\left(t+1\right)+\ln x_1<1$，

即证：$\ln\left(t+1\right)+\frac{t-1-t\ln t}{t-1}<1$，即证：$\left(t-1\right)\ln\left(t+1\right)-t\ln t<0$，

令 $S\left(t\right)=\left(t-1\right)\ln\left(t+1\right)-t\ln t,t>1$，

则 $S'\left(t\right)=\ln\left(t+1\right)+\frac{t-1}{t+1}-1-\ln t=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{2}{t+1}$，

先证明一个不等式：$\ln\left(x+1\right)\leq x$.

设 $u(x)=\ln(x+1)-x$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$，

当 $-1<x<0$ 时，$u'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$u'(x)<0$，

故 $u(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为增函数，在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，故 $u(x)_{\max}=u(0)=0$，

故 $\ln(x+1)\le x$ 成立

由上述不等式可得当 $t>1$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\le\dfrac{1}{t}<\dfrac{2}{t+1}$，故 $S'(t)<0$ 恒成立，

故 $S(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数，故 $S(t)<S(1)=0$，

故 $(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$ 成立，即 $x_1+x_2<e$ 成立．

综上所述，$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$．

【点睛】方法点睛：极值点偏移问题，一般利用通过原函数的单调性，把与自变量有关的不等式问题转化与原函数的函数值有关的不等式问题，也可以引入第三个变量，把不等式的问题转化为与新引入变量有关的不等式问题．