



第2课时 角的平分线的判定

名师点金

角的平分线的性质与判定定理的关系:

(1)都与距离有关,即垂直的条件都应具备.

(2)点在角的平分线上 $\xrightarrow[\text{判定定理}]{\text{性质}}$ 点到这个角两边的距离相等.

(3)性质反映只要是角的平分线上的点,到角两边的距离就一定相等;判定定理反映只要是到角两边距离相等的点,都应在角的平分线上.

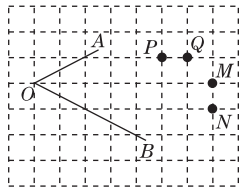
I 夯实基础 · 逐点练 (点拨见 178 页)

随堂导练

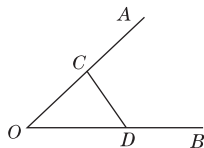
知识点1 角平分线的判定

1. 在正方形网格中, $\angle AOB$ 的位置如图所示,到 $\angle AOB$ 两边距离相等的点应是(**A**)

A. 点 M B. 点 N C. 点 P D. 点 Q



(第 1 题)



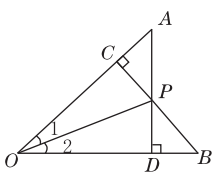
(第 2 题)

2. 如图,在 CD 上求一点 P ,使它到边 OA,OB 的距离相等,则点 P 是(**C**)

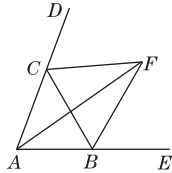
A. 线段 CD 的中点
B. CD 与过点 O 作 CD 的垂线的交点
C. CD 与 $\angle AOB$ 的平分线的交点
D. 以上均不对

3. 如图, $AD \perp OB, BC \perp OA$,垂足分别为 D, C , AD 与 BC 相交于点 P ,若 $PA = PB$,则 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的大小关系是(**A**)

A. $\angle 1 = \angle 2$ B. $\angle 1 > \angle 2$ C. $\angle 1 < \angle 2$ D. 无法确定



(第 3 题)



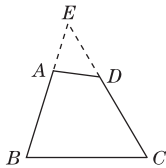
(第 4 题)

4. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,分别与 $\angle ABC, \angle ACB$ 相邻的外角的平分线相交于点 F ,连接 AF ,则下列结论正确的是(**B**)

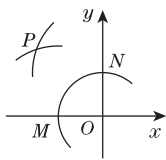
A. AF 平分 BC B. AF 平分 $\angle BAC$
C. $AF \perp BC$ D. 以上结论都正确

5. (2015 · 永州) 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, BA 和 CD 的延长线交于点 E ,若点 P 使得 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD}$,则满足此条件的点 P (**D**)

A. 有且只有 1 个
B. 有且只有 2 个
C. 组成 $\angle E$ 的平分线
D. 组成 $\angle E$ 的平分线所在的直线(E 点除外)



(第 5 题)

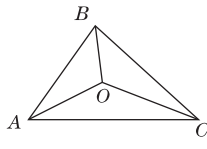


(第 6 题)

6. (中考·咸宁) 如图,在平面直角坐标系中,以点 O 为圆心,适当的长为半径画弧,交 x 轴于点 M ,交 y 轴于点 N ,再分别以点 M, N 为圆心,大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧,两弧在第二象限交于点 P .若点 P 的坐标为 $(2a, b+1)$,则 a 与 b 的数量关系为(**B**)
- A. $a = b$ B. $2a + b = -1$
C. $2a - b = 1$ D. $2a + b = 1$

知识点2 三角形的角平分线

7. 如图, $\triangle ABC$ 的三边 AB, BC, CA 的长分别为 40, 50, 60, 其三条角平分线交于点 O ,则 $S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} : S_{\triangle CAO} =$ **4 : 5 : 6**.



(第 7 题)

8. 到 $\triangle ABC$ 的三条边距离相等的点是 $\triangle ABC$ 的(**B**)
- A. 三条中线的交点 B. 三条角平分线的交点
C. 三条高的交点 D. 以上均不对
9. 到三角形三边距离相等的点的个数是(**D**)
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

易错点 忽略角的平分线的判定定理中的条件而造成推理错误

10. 如图, $PA = PB, \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. 求证: OP 平分 $\angle AOB$.

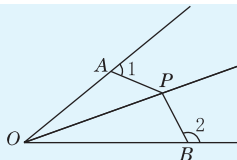
证明: 过点 P 作 $PE \perp AO, PF \perp OB$,垂足分别为 E, F .

$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \angle 2 + \angle PBO = 180^\circ, \therefore \angle 1 = \angle PBO$.

在 $\triangle PAE$ 和 $\triangle PBF$ 中,

$\begin{cases} \angle AEP = \angle BFP = 90^\circ, \\ \angle 1 = \angle PBF, \\ PA = PB, \end{cases}$

$\therefore \triangle PAE \cong \triangle PBF (AAS), \therefore PE = PF. \therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线,即 OP 平分 $\angle AOB$.



(第 10 题)



II 整合方法·提升练 (点拨见 178 页)

课后导练

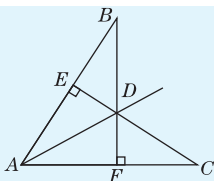
考查角度1 利用角的平分线的判定与三角形全等证角的平分线

11. 如图,已知 BF 与 CE 相交于点 D , $BD=CD$, $BF \perp AC$ 于点 F , $CE \perp AB$ 于点 E .

求证:点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

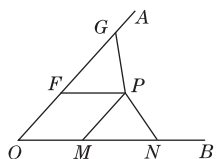
证明: $\because BF \perp AC, CE \perp AB$,
 $\therefore \angle BED = \angle CFD = 90^\circ$. 在 $\triangle BDE$
 和 $\triangle CDF$ 中, $\begin{cases} \angle BED = \angle CFD, \\ \angle BDE = \angle CDF, \\ BD = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF (AAS)$. $\therefore DE = DF$. 又 $\because BF \perp AC, CE \perp AB$, $\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上. (第 11 题)

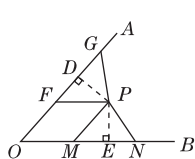


考查角度2 利用角的平分线的判定与三角形的面积证角的平分线

12. 如图,已知 F, G 是 OA 上两点, M, N 是 OB 上两点,且 $FG=MN$, $\triangle PFG$ 和 $\triangle PMN$ 的面积相等. 试判断点 P 是否在 $\angle AOB$ 的平分线上,并说明理由.



(第 12 题)



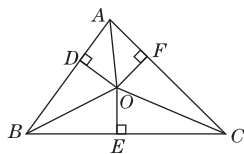
(第 12 题答图)

解:点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上. 理由:如答图,作 $PD \perp OA$ 于点 D , $PE \perp OB$ 于点 E . $\because S_{\triangle PFG} = \frac{1}{2} FG \cdot PD$, $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} MN \cdot PE$, $S_{\triangle PFG} = S_{\triangle PMN}$, $\therefore \frac{1}{2} FG \cdot PD = \frac{1}{2} MN \cdot PE$.

又 $\because FG=MN$, $\therefore PD=PE$. $\therefore$ 点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

考查角度3 综合利用角的平分线的性质与判定证角的平分线

13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O , $OD \perp AB$, $OE \perp BC$, $OF \perp AC$, D, E, F 分别是垂足. 求证:点 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

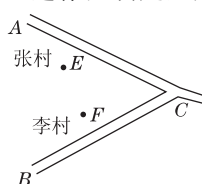


(第 13 题)

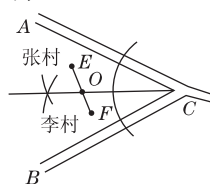
解: $\because$ 点 O 在 $\angle ABC$ 的平分线上, $OD \perp AB$, $OE \perp BC$, $\therefore OD=OE$. 同理: $OE=OF$. $\therefore OD=OF$. $\therefore$ 点 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

考查角度4 利用角的平分线的判定与性质设计方案 (建模思想)

14. (改编·凉山州) 如图,李明计划在张村、李村之间建一家超市. 张、李两村坐落在两相交公路内. 超市的位置应满足下列条件:(1)使其到两公路的距离相等;(2)为了方便群众,超市到两村的距离之和最短,请你通过作图确定要建超市的位置.



(第 14 题)



(第 14 题答图)

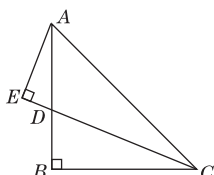
解:如答图,连接 EF , 作 $\angle ACB$ 的平分线交 EF 于点 O , 则点 O 就是所要建超市的位置.

III 探究培优·拓展练 (点拨见 178 页)

课后选练

拔尖角度1 巧用角的平分线构造全等三角形

15. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=CB$, $\angle ABC=90^\circ$, D 是 AB 上一点, $AE \perp CD$ 于点 E , 且 $AE = \frac{1}{2} CD$, $BD=8$ cm, 求点 D 到 AC



(第 15 题)

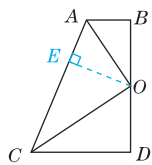
解:分别延长 AE, CB 相交于点 F , 过点 D 作 $DM \perp AC$ 于点 M . $\because \angle ABC=90^\circ, AE \perp CD$, $\therefore \angle FAB + \angle F = 90^\circ$, $\angle FCE + \angle F = 90^\circ$, $\therefore \angle FAB = \angle FCE$. 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CBD$ 中, $\begin{cases} \angle FAB = \angle DCB, \\ AB = CB, \\ \angle ABF = \angle CBD = 90^\circ, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBD (ASA)$. $\therefore AF = CD$. $\because AE = \frac{1}{2} CD$, $\therefore AE = \frac{1}{2} AF = EF$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle FCE$ 中, $\begin{cases} AE = FE, \\ \angle AEC = \angle FEC = 90^\circ, \\ CE = CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle FCE (SAS)$. $\therefore \angle ACE = \angle FCE$. 又 $\because DM \perp AC, DB \perp BC, BD=8$ cm, $\therefore DM = DB = 8$ cm, 即点 D 到 AC 的距离为 8 cm.

拔尖角度2 巧用角的平分线的判定及性质解相关问题

16. 如图,在四边形 $ABDC$ 中, $\angle D = \angle B = 90^\circ$, O 为 BD 的中点, 且 AO 平分 $\angle BAC$. 求证:



(第 16 题)

- (1) CO 平分 $\angle ACD$;
- (2) $OA \perp OC$;
- (3) $AB + CD = AC$.

证明:(1)如答图,过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E , $\because \angle B = 90^\circ$, AO 平分 $\angle BAC$, $\therefore OB = OE$. $\because$ 点 O 为 BD 的中点, $\therefore OB = OD$. $\therefore OE = OD$. 又 $\because \angle D = 90^\circ$, $\angle OEC = 90^\circ$, $\therefore CO$ 平分 $\angle ACD$.

(2)在 $Rt\triangle ABO$ 和 $Rt\triangle AEO$ 中, $\begin{cases} AO = AO, \\ OE = OB, \end{cases} \therefore Rt\triangle ABO \cong Rt\triangle AEO (HL)$. $\therefore \angle AOB = \angle AOE = \frac{1}{2} \angle BOE$. 同理, $\angle COD = \angle COE = \frac{1}{2} \angle DOE$. $\therefore \angle AOC = \angle AOE + \angle COE = \frac{1}{2} \angle BOE + \frac{1}{2} \angle DOE = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$. $\therefore OA \perp OC$.

(3) $\because Rt\triangle ABO \cong Rt\triangle AEO$, $\therefore AB = AE$. 同理可得 $CD = CE$. $\therefore AC = AE + CE$, $\therefore AB + CD = AC$.